Etude d'une méthodologie de modélisation et de commande d'un robot multiaxe pour une application en radiologie médicale

Omar Al Assad

To cite this version:

Omar Al Assad. Etude d'une méthodologie de modélisation et de commande d'un robot multiaxe pour une application en radiologie médicale. Automatique / Robotique. Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT : . tel-00431416

HAL Id: tel-00431416
https://theses.hal.science/tel-00431416

Submitted on 12 Nov 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° D'ORDRE 9436

Faculté des sciences d'Orsay

Supélec

UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11

THÈSE DE DOCTORAT

SPECIALITE : PHYSIQUE

Ecole Doctorale « Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes »

Présentée par :

Omar AL ASSAD

Sujet :

Etude d'une méthodologie de modélisation et de commande d'un robot multiaxe pour une application en radiologie médicale

Soutenue le 16 juin 2009 devant les membres du jury :

MM.	P. BOUCHER	Professeur à Supélec, Directeur de thèse
	Y. CHITOUR	Professeur, Université Paris-Sud 11
	E. GODOY	Professeur à Supélec, Co-Directeur de thèse
Mme.	X. LIN-SHI	Maître de conférences, HDR, INSA de Lyon, Rapporteur
MM.	E. OSTERTAG	Professeur émérite, Université de Strasbourg, Rapporteur
	M. YAGOUBI	Chargé de recherche, IRCCYN, Ecole des Mines de Nantes
	V. CROULARD	Docteur Ingénieur, GE Healthcare Invité

À Serene,

À mes parents.

Remerciements

Je voudrais saluer et remercier ici les personnes qui ont contribué, toutes dans des manières très différentes, à la réussite de ma thèse.

Mes premiers remerciements vont à M. Emmanuel Godoy, mon encadrant et mon co-directeur de thèse, pour toute son aide précieuse, sa disponibilité, son support sans faille et surtout sa confiance en moi tout au long de ma thèse. Je le remercie aussi pour ses qualités humaines, il a su me motiver et m'accompagner dans ce projet jusqu'à la fin.

Je remercie vivement M. Vincent Croulard, qui m'a fait confiance et qui m'a donné l'opportunité de réaliser ce travail de thèse au sein de la société GE Healthcare. Grâce à lui j'ai pu vivre cette expérience très enrichissante professionnellement et personnellement.

J'exprime toute ma reconnaissance à M. Patrick Boucher, Directeur du Département Automatique de Supélec et mon directeur de thèse, pour m'avoir accueilli dans son équipe et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens pour mener à bien mes travaux.

Je suis très reconnaissant à Mme. Xuefang Lin-Shi et M. Éric Ostertag pour avoir accepté d'évaluer mon travail et pour leurs précieuses remarques. Je remercie M. Yacine Chitour pour avoir présidé le jury de ma soutenance de thèse, ainsi que M. Mohamed Yagoubi pour avoir accepté de participer à ce jury.

Je tiens à remercier chaleureusement M. Carlos Martínez Ferreira, ingénieur à GE Healthcare, pour ses compétences techniques, ses conseils et sa disponibilité qui ont grandement contribué au bon déroulement de mon travail. Je le remercie, également, pour sa sympathie et sa bonne compagnie pour les voyages professionnels que nous avons effectués ensemble.

Un grand merci à M. Yann Delmas, Docteur ingénieur à GE Healthcare, qui m'a donné l'opportunité de participer à des projets remarquables dans des contextes très riches à la fois sur le plan technique ainsi que relationnel. Je le remercie pour ses conseils, ses idées qui m'ont beaucoup inspirés.

Je tiens également à remercier M. Hubert Hacquard, mon directeur à GE Healthcare, de m'avoir donné les moyens pour que cette thèse se déroule dans des conditions idéales.

Je voudrais exprimer ma gratitude à toutes les personnes du département positionneur vasculaire à GE Healthcare pour leur amabilité et leur soutien de tous les jours.

Je souhaite aussi remercier mon ami Jordi Battle Porto, ancien élève ingénieur à Supélec, pour le travail très fructueux que nous avons effectué ensemble dans le cadre de ma thèse lors de son stage de fin d'études à GE Healthcare.

Je ne saurais oublier les membres du département Automatique de Supélec ainsi que mes collègues Docteur et futurs Docteurs : Hichem, Boubekeur, Farag, Ghizlane, Cristina, Giuliana, Bastien, Luca, Bilal, Alaa, Henri, Ali, Haytham, Spilios, Zakaria, Guillermo, Olivier et Mohamed pour l'agréable ambiance dans le département. Merci à Josiane pour sa disponibilité et son efficacité.

Mes remerciements vont aussi à tous mes amis qui m'ont supporté et soutenu dans ma thèse, avec qui j'ai passé des moments inoubliables, en particulier, Oussama, Ahmad, Ounas, Yasser, Hachem et Houmam.

Je voudrais remercier du fond du cœur mon frère Amar et ma sœur Houda toujours à mes côtés et qui m'ont encouragé et soutenu pour réussir ma thèse.

Toutes mes pensées vont à mon âme-sœur, ma fiancée Serene, qui m'a accompagné et motivé sans cesse jusqu'à l'aboutissement de ma thèse, auprès de qui je trouvais toute la confiance pour me surpasser et relever les défis de ce travail. Je la remercie pour sa gentillesse et les mots doux qui m'ont toujours réconforté.

Quoique je fasse, je ne saurais remercier suffisamment mes chers parents, pour leur sacrifice et leur dévouement pour m'offrir tous les moyens afin d'exceller dans mon travail. Malgré la distance, je les ai toujours trouvés près de moi, me donnant toute l'énergie et la force pour aboutir au but. Je n'oublierai jamais que ce succès est leur réussite.

Sommaire

Liste des publications

Conférences internationales avec actes

Al Assad, O., E. Godoy & V. Croulard. 2007. Irreversibility modelling applied to the control of complex robotic drive chains. In *4th ICINCO Conference*, 217-222. Angers, France.

Al Assad, O., E. Godoy & V. Croulard. 2008. Macroscopic drive chain efficiency modeling using state machines. In *17th World Congress The International Federation of Automatic Control*, 2294-2299. Seoul, Korea.

Al Assad, O., C. Martinez Ferreira, V. Croulard & E. Godoy. 2009. Vibration reduction using a two-step braking profile. In *American Control Conference*. St. Louis, Missouri, USA.

Stoica, C., O. Al Assad, P. Rodriguez-Ayerbe, D. Dumur & E. Godoy. 2008. Application of Robustified Model Predictive Control to a Medical Robot. In *23rd IAR Workshop on Advanced Control and Diagnosis 2008*, 180-185. Coventry, UK.

Stoica, C., O. Al Assad, P. Rodriguez-Ayerbe, E. Godoy & D. Dumur. 2009. Control of a flexible arm by mean of robustified MPC. In *European Control Conference 2009*. Budapest, Hungary.

Atelier Mathworks

Al Assad, O., E. Godoy & V. Croulard. 2008. Automatic models generation for robotic applications. In *Nordic MATLAB User Conference*. Stockholm, Sweden.

Chapitre I

Introduction générale

Chapitre I. Table des matières

1 Introduction

L'évolution des besoins cliniques dans le domaine de l'imagerie médicale induit de nouveaux besoins en termes de régulation de vitesse des dispositifs de prise d'images : accroissement des vitesses, amélioration du suivi de trajectoires et diminution des vibrations introduites par les souplesses de la structure mécanique et les phénomènes de frottement (particulièrement lors des phases de déplacements à basse vitesse). Ces besoins nécessitent :

- le développement de modèles mécaniques des robots d'imagerie avec en particulier la prise en compte fine des phénomènes mal maîtrisés actuellement comme les frottements, les modes élastiques dus à la structure ou aux chaînes de transmission,
- la mise en place des outils permettant de recaler et de valider les modèles,
- l'étude des lois de commande du robot permettant de satisfaire les objectifs du cahier des charges.

Les travaux de recherche exposés dans ce mémoire se sont inscrits aussi dans le cadre du développement d'un nouveau type de robot multiaxe d'imagerie médicale. Ils ont porté sur deux aspects complémentaires :

- la méthodologie de modélisation des robots positionneurs dans les applications d'imagerie médicale,
- les méthodologies de contrôle de mouvements et de réduction des vibrations.

En particulier, un effort important a été réalisé sur les aspects liés à la modélisation des structures mécaniques et dans la mise en place d'une démarche formalisée en vue d'obtenir les modèles des robots (de connaissances, d'analyse ou encore de commande). Aussi, ce travail vise à démontrer, via une étude comparative, le potentiel d'application de plusieurs approches de modélisation et de commande dans ce cadre précis. En complément au travail de modélisation un outil d'aide à la modélisation a été mis en place.

Les travaux de thèse présentés constituent le fruit des études menées conjointement par le Département Automatique de Supélec et GE Healthcare fabricant de robots de radiologie interventionnelle. Ces travaux se sont déroulés dans le cadre d'une collaboration industrielle avec une convention CIFRE (Convention Industrielle de Formation à la Recherche) depuis septembre 2005.

Organisation de la thèse

Ce mémoire s'articule autour de deux axes principaux, à savoir, les méthodologies de modélisation et les méthodologies de commande. Les concepts développés dans ce travail sont présentés selon une approche « Bottom-up » visant à étudier le cas monoaxe afin de mieux définir la problématique identifiée et de comprendre l'impact des solutions. Ensuite, l'étude portera sur l'extension des concepts retenus dans le cadre de la commande multiaxe du robot. Les travaux sont organisés selon le plan décrit ci-dessous.

Chapitre 1

Dans ce chapitre, le lecteur pourra comprendre le contexte industriel de l'étude et les problématiques liées au domaine médical. Dans un premier temps, l'accent est mis sur les applications de la robotique dans le cadre de l'imagerie de radiologie interventionnelle. Un descriptif des robots conçus par GE Healthcare et qui ont servi de bancs de test pour la validation expérimentale est donné. Ensuite, une vue globale des modalités de radiologie est présentée. Finalement, les objectifs des travaux de la thèse sont précisés.

Chapitre 2

Ce chapitre est consacré à l'étude des outils mathématiques de modélisation des robots positionneurs. Cette phase comporte trois éléments : la modélisation de la structure mécanique, la modélisation des chaînes de motorisation et les approches d'identification du système. Nous avons décliné la modélisation de la structure en deux phases, la première étant la mise en place du modèle rigide, la deuxième étant la modélisation des souplesses de la structure et son intégration dans le modèle rigide.

Chapitre 3

Dans ce chapitre, une méthodologie de commande monoaxe est proposée. Elle porte sur l'étude des trois actions classiquement utilisées pour la commande des systèmes, à savoir, la génération des trajectoires, l'action d'anticipation et l'action corrective. Les notions développées dans ce chapitre ont fait l'objet d'une étude comparative afin de démontrer leur potentiel et les performances obtenues. Il s'agira, en fin, de retenir la commande qui sera implémentée dans un contexte multiaxe.

Chapitre 4

Finalement, ce chapitre consiste à adapter dans un cadre général, les approches de commande retenues dans le cas monoaxe. Ce dernier dresse le bilan des essais expérimentaux ainsi que le comparatif des solutions retenues.

Chapitre 5

Ce chapitre dresse le bilan des travaux effectués ainsi que les perspectives envisagées pour les travaux futurs.

2 La robotique médicale

Au cours des dernières décennies, les systèmes robotisés ont connu une révolution majeure grâce, d'une part aux efforts réalisés en termes d'optimisation et de miniaturisation des composants mécaniques, d'autre part aux évolutions extraordinaires de l'électronique et de l'informatique qui ont amélioré de façon importante l'interaction des robots avec leur environnement. Cette révolution a profité à toutes les disciplines de la mécatronique et particulièrement à la robotique médicale.

En robotique médicale, les applications s'articulent autours de deux axes, à savoir, la robotique d'assistance aux personnes et la robotique d'assistance aux médecins :

- La première famille de robots, vise à améliorer le quotidien du patient soit via une assistance directe, par exemple, la réalisation de certains gestes pour les personnes handicapées et les personnes âgées, ou bien dans le cadre d'un traitement tel que la rééducation orthopédique (Figure 1)

- La deuxième famille vise, quant à elle, à assister le médecin pour la réalisation de l'acte médical en lui offrant la possibilité de réaliser des gestes fins et précis, et de réaliser des interventions peu invasives qui minimisent ainsi les traumatismes (Figure 2).

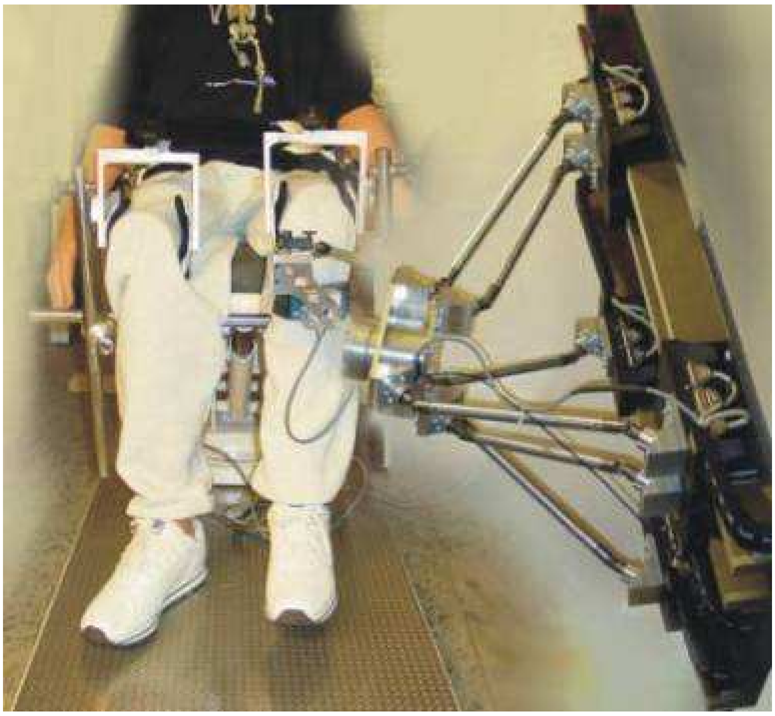
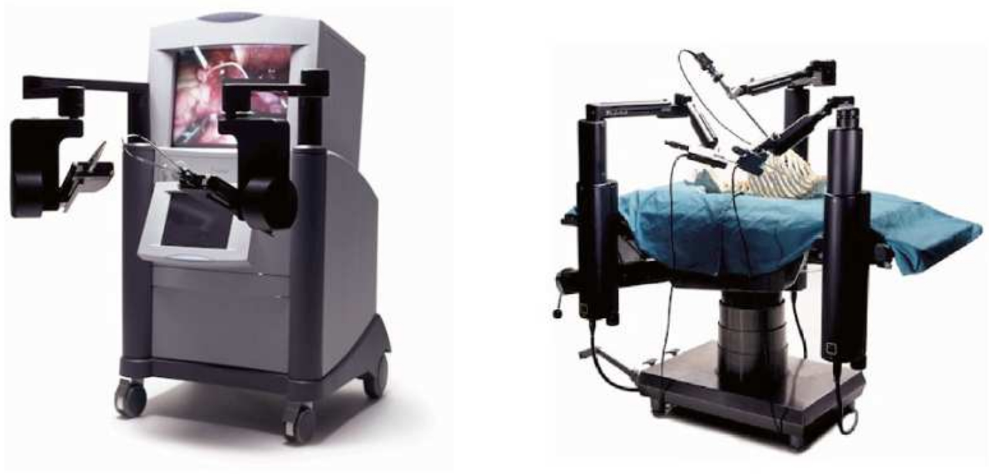


Figure 1: ROBOPED pour la rééducation orthopédique



(a) Manipulateur maître du robot Zeus (b) Manipulateur esclave du robot Zeus

Figure 2: Système de télé-chirurgie Zeus de Computer Motion Inc

L'introduction de la robotique dans la pratique médicale a permis d'ouvrir le champ à des techniques très innovantes telles que la chirurgie mini-invasive, la chirurgie à distance (Figure 2), les robots d'imagerie médicale, etc. Dans le cadre de ce travail de thèse, nous nous intéresserons aux robots d'imagerie médicale et plus particulièrement à la radiologie interventionnelle. Pour un état de l'art détaillé sur la robotique médico-chirurgicale, le lecteur pourra se référer à *(Van Meer 2005)*.

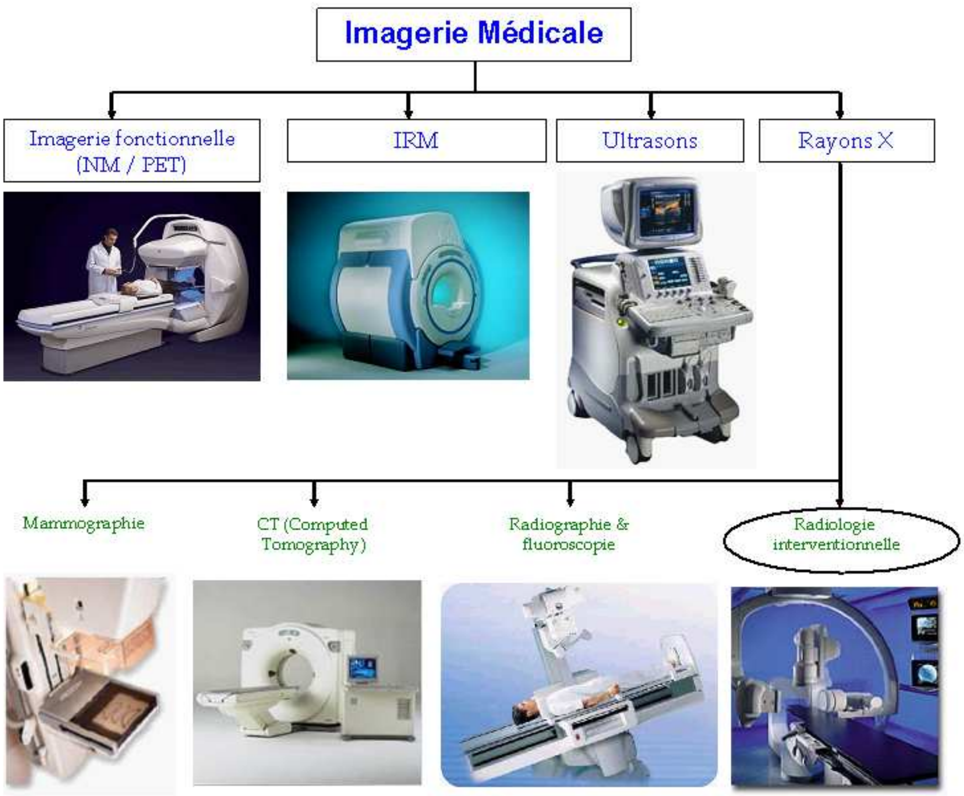


Figure 3: Les techniques d'imagerie médicale

3 La radiologie interventionnelle

La radiologie interventionnelle (Figure 3) est parmi les applications de la robotique qui ont connu un grand succès dans le domaine médical. Cette technique d'imagerie comme son nom l'indique, associe l'utilisation de la radiologie i.e. l'imagerie par rayons X avec une intervention chirurgicale. L'intérêt de cette pratique médicale comparée aux techniques d'imagerie traditionnelle est incontestable. Assisté par un robot, le médecin peut déplacer une chaîne image (Figure 7) autour du patient afin d'avoir un accès en temps réel à des images rayons-X (RX) de l'organe d'intérêt. Dans la suite, nous allons présenter, les robots de positionnement développés par GE Healthcare et qui ont fait l'objet de l'étude dans le cadre de ce travail de thèse ainsi que les modalités d'imagerie réalisables par ces derniers. Le lecteur pourra trouver des informations complètes sur les autres techniques d'imagerie médicale dans *(Webb 1988).*

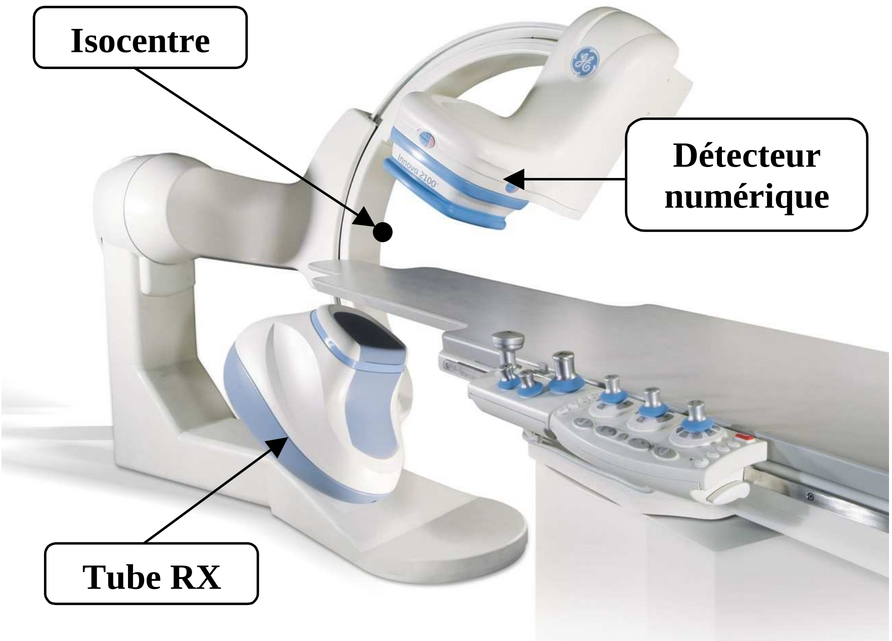


Figure 4: Robot Monoplan Innova

3.1 Description d'un robot de radiologie interventionnelle

Une salle de radiologie interventionnelle est équipée de deux sous-systèmes de positionnement, à savoir, une table motorisée, qui permet de positionner le patient et un robot manipulateur dont l'objectif est d'orienter la chaîne image (Figure 4). La table est dotée de quatre degrés de liberté, trois translations dans l'espace de travail (verticale, longitudinale et latérale) et une rotation non motorisée autour de l'axe vertical. Le positionneur de la chaîne image est, quant à lui, un robot à chaîne ouverte simple doté de quatre degrés de liberté, trois liaisons rotoïdes (Larm, Pivot, et Carc) et une liaison prismatique (Detector Lift) (Figure 5).

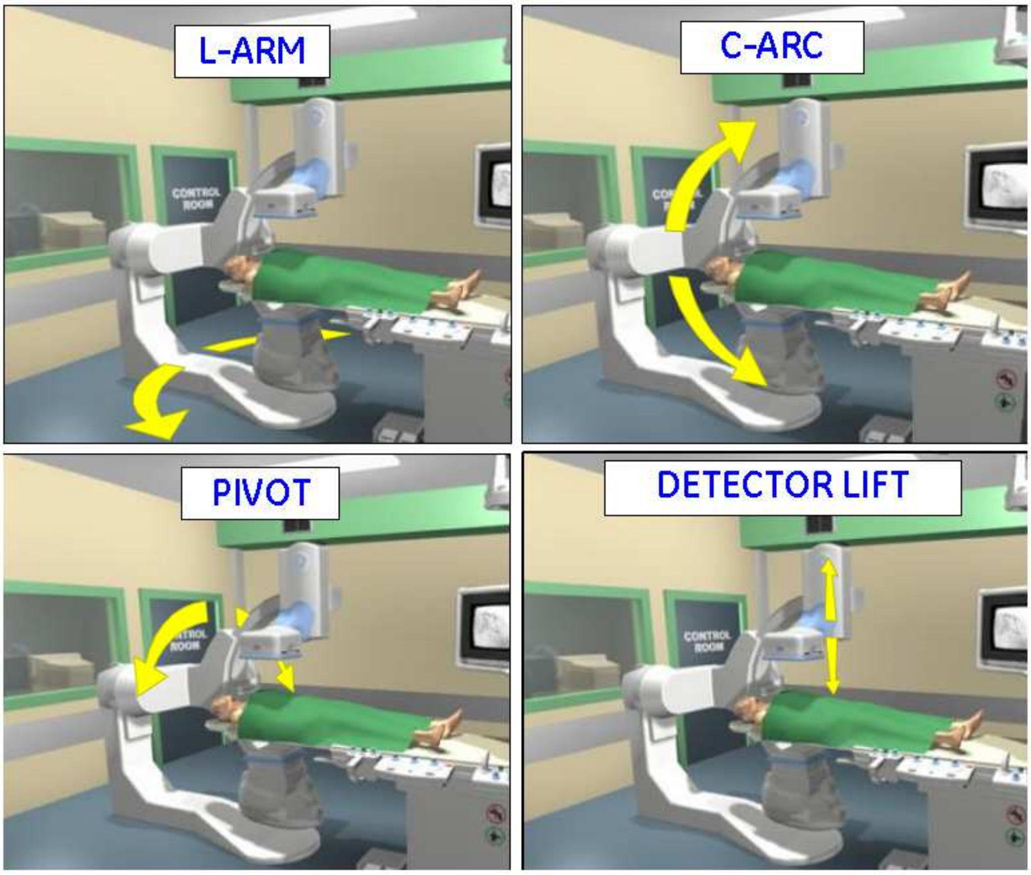


Figure 5 : Mouvements du robot positionneur

La chaîne image est composée de deux éléments : un générateur de rayons X (tube RX) (Figure 6) et un système de capture d'image analogique ou numérique (Figure 7, Figure 8). Le tube RX permet de générer artificiellement des rayons X. En effet, ce dernier permet de transformer l'énergie électrique en rayons X suite à une procédure d'accélération et de freinage d'électrons entre une cathode et une anode. Pour plus de détails sur les tubes RX, le lecteur pourra consulter *(Al Assad 2005).*

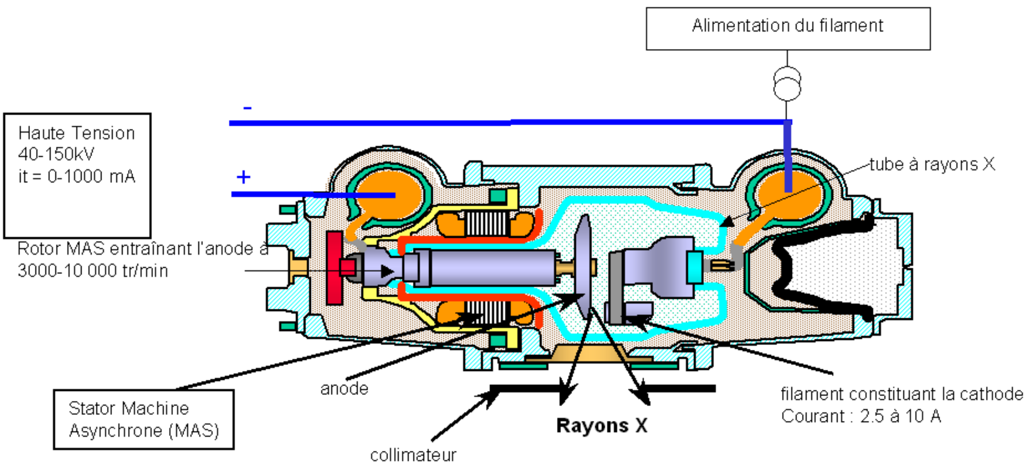


Figure 6: Composants du tube à Rayons X

La chaîne image, est orientée autour du point d'intérêt grâce aux trois axes rotoïdes du robot. Toutefois, il faut noter que deux axes auraient été suffisants pour effectuer toutes les orientations possibles de la chaîne image dans l'espace de travail. Cependant, l'ajout d'un troisième axe a permis d'améliorer la maniabilité du robot en autorisant plusieurs configurations articulaires pour la même orientation de la chaîne image. Cette redondance a, ainsi, apporté une facilité d'accès aux personnels soignants et une plus grande liberté pour positionner la table. Le radiologue a également la possibilité d'ajuster la distance entre le détecteur et le tube RX grâce à la liaison (Detector Lift). Cette distance est appelée SID (Source to Image Distance). Elle est directement liée à la dose de rayons X appliquée au patient.

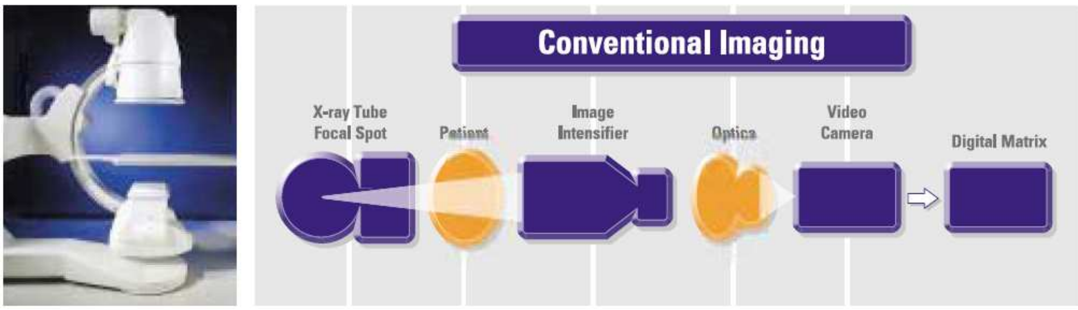


Figure 7 : Chaîne image analogique

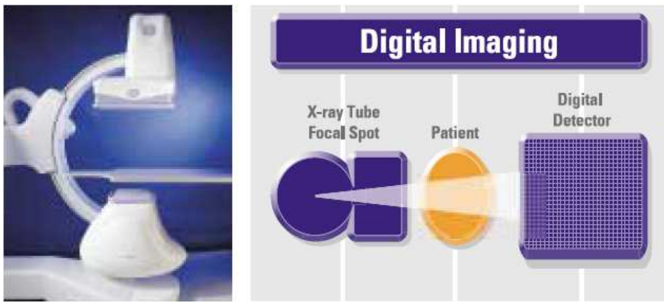


Figure 8 : Chaîne image numérique

Nous avons présenté précédemment un système de radiologie interventionnelle avec une seule chaîne image. Cette architecture est appelée positionneur *monoplan*. Nous pouvons trouver également des systèmes *biplan* équipés de deux chaînes images portées par deux robots (Figure 9) :

- le premier est appelé *positionneur frontal* ; il structurellement identique au *monoplan*
- le deuxième, suspendu au plafond, est appelé *positionneur latéral*.

Grâce à ce dispositif, le médecin aura à sa disposition un système de visualisation stéréoscopique.

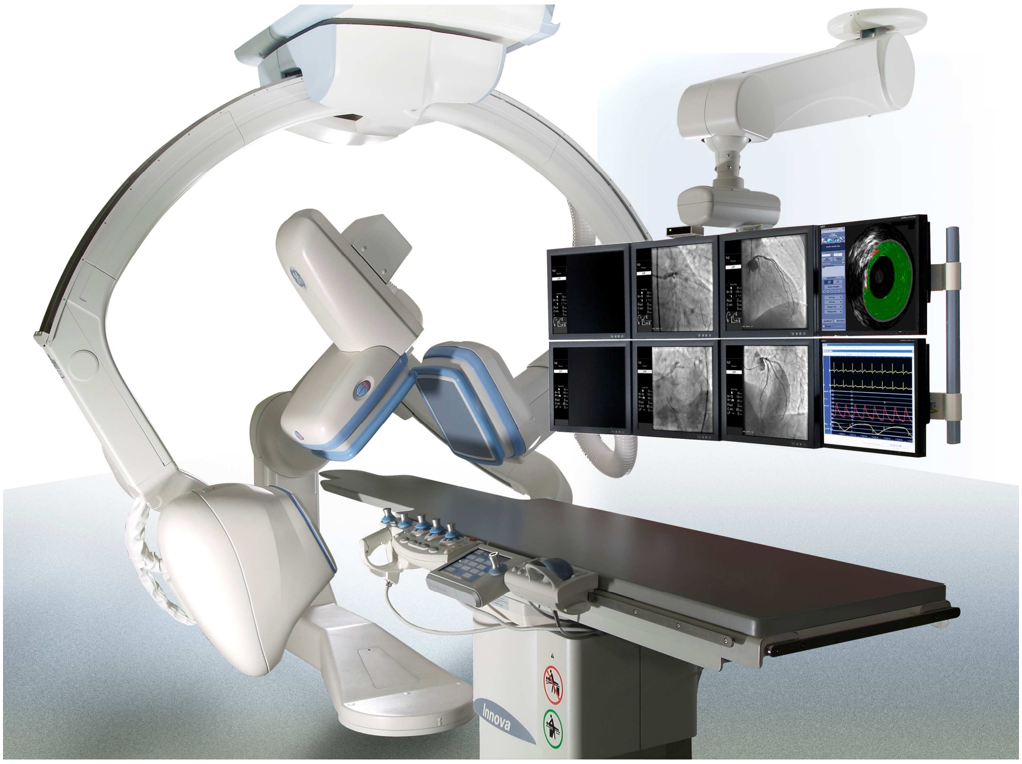


Figure 9: Robot Biplan Innova

Du point de vu cinématique, le positionneur latéral est un robot à chaîne ouverte arborescente (Figure 10). Il est doté de cinq degrés de liberté : une translation longitudinale (Chariot), deux rotations (Pivot et Carc) et deux translations au niveau des organes terminaux (Lateral detector Lift et Lateral tube Lift). Dans le cas de ce positionneur, le médecin peut ajuster la SID (Source to Image Distance) grâce à la position du détecteur et la SOD (Source to Object Distance) par le réglage de la position du tube RX.

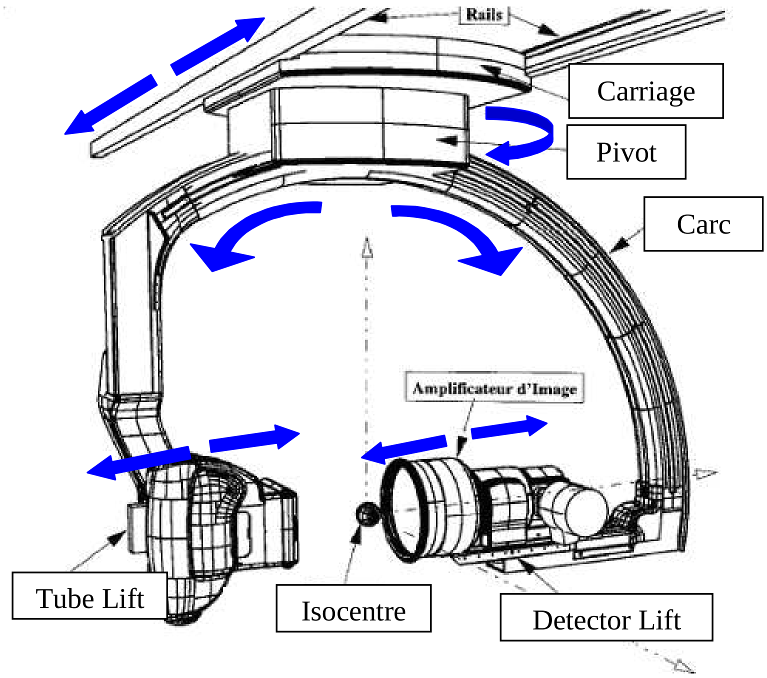


Figure 10: Positionneur Latéral

Dernier point mais non le moindre, il faut noter que la topologie du *monoplan* et du *biplan* fait que la ligne d'incidence des rayons X passe toujours par un point appelé **Isocentre** (Figure 4, Figure 10). Il correspond au point d'intersection des axes de rotations du frontal (Larm, Pivot et Carc) et les axes de rotation du latéral (Pivot et Carc). Ce point est très important car il définit l'origine du repère de l'espace de travail ce qui, bien entendu, permet de positionner le patient lors de l'intervention.

Ce travail de thèse s'est inscrit également dans le cadre d'un projet de développement d'un nouveau positionneur « Agility » ayant un nombre plus important de degrés de liberté avec une structure suspendue au plafond (Figure 11).

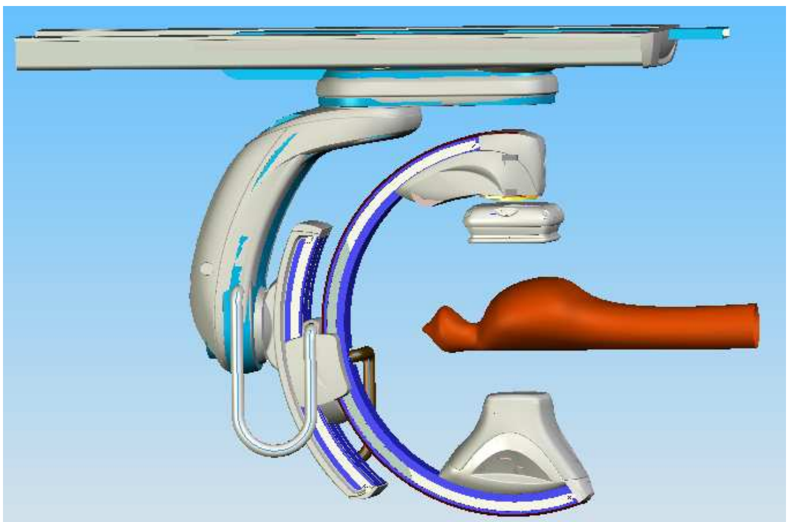


Figure 11 : Nouveau positionneur en cours de développement

3.1.1 Architecture de la carte de Contrôle

Le contrôleur de mouvements sur les robots Innova *monoplan* et *biplan*, a une architecture *monovariable* dite «commande axe par axe». Chaque axe est commandé par une structure de régulation en cascade *(Godoy 2007)* intégrant une boucle de courant, une boucle de vitesse et une boucle de position. Le régulateur est implémenté sur une carte appelée MCB « Motion Control Board » (Figure 12). Par ailleurs, les mesures disponibles pour la commande sont le courant, la position et la vitesse de l'arbre moteur.

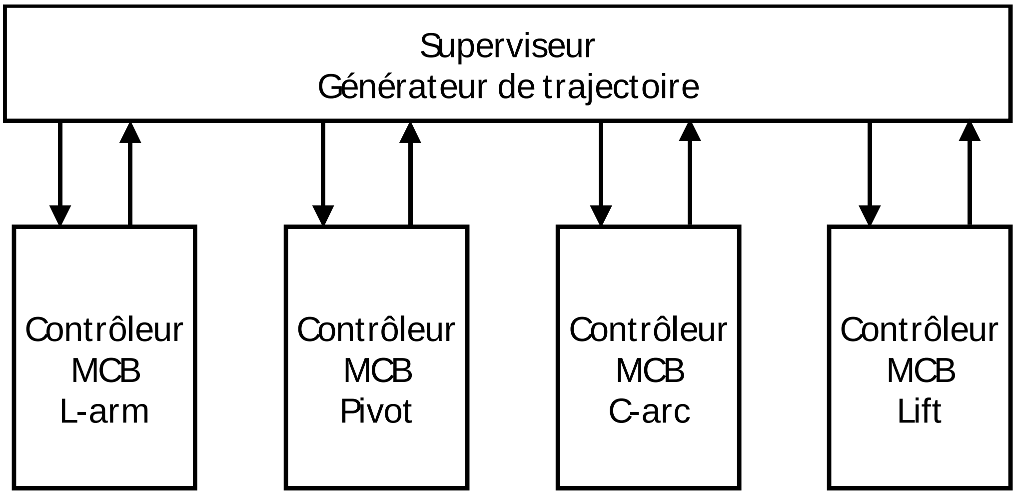


Figure 12 : Architecture de commande du robot Innova

Les consignes de trajectoire sont générées au niveau du superviseur, ensuite transmises à chaque MCB. En mode automatique, ces consignes représentent des trajectoires calculées hors ligne. Cependant, en mode manuel ces trajectoires sont interprétées directement à partir des manettes de commande (Figure 13) .

Il faut noter que la structure actuelle ne permet pas une commande *multivariable*. C'est pourquoi, les aspects liés au couplage entre les axes ne sont pas pris en compte dans la commande actuelle.

Figure 13: Manette de commande manuelle du robot Innova

3.2 *Les modalités de la radiologie interventionnelle*

La radiologie interventionnelle comme définie précédemment est une technique d'imagerie qui associe l'utilisation de la radiologie, i.e. l'imagerie par rayons X, avec une intervention chirurgicale. Elle permet principalement de réaliser des angiographies i.e. la visualisation des vaisseaux sanguins. Nous verrons également que le robot positionneur Innova peut être utilisé dans un cadre conventionnel tel que la radiographie ainsi que l'imagerie type CT (Computed Tomography) ou encore l'imagerie 3D.

En somme, dans cette partie il ne s'agit pas d'étudier en détails les pratiques médicales réalisables par les systèmes Innova, mais plutôt d'exposer une idée globale sur leurs modes de fonctionnement afin de les intégrer dans la phase d'étude du système et de sa commande dans le cadre de l'Automatique.

Les modalités que nous allons voir sont groupées en deux catégories, des modalités dites statiques, dans lesquelles les images sont prises à l'arrêt du robot, et des modalités dites dynamiques, dans lesquelles les images sont prises pendant le mouvement du robot.

3.2.1 L'angiographie numérique soustraite (DSA)

L'angiographie numérique soustraite (DSA pour *Digital Subtracted Angiography*) est une modalité d'imagerie statique qui permet de visualiser les vaisseaux sanguins, elle est utilisée dans plusieurs pratiques médicales telles que la neuroradiologie interventionnelle et la cardiologie interventionnelle.

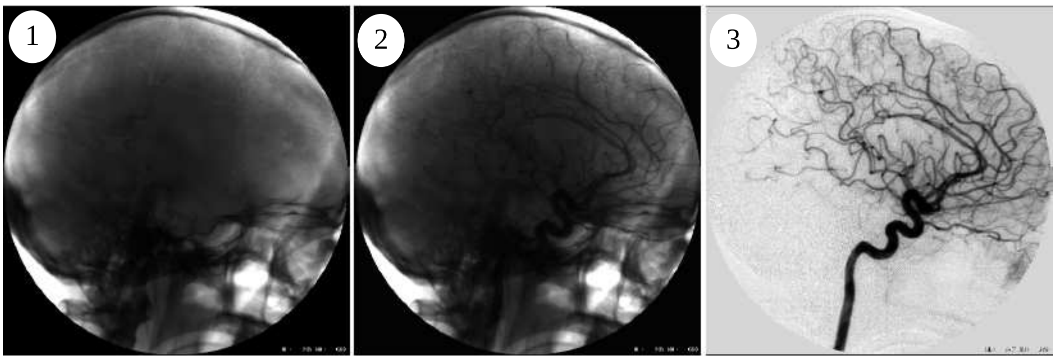


Figure 14 : Angiographie soustraite - Neuroradiologie

L'intervention consiste à injecter un produit de contraste (à base d'iode) qui va se mélanger au sang et le rendre temporairement opaque aux rayons X. Cette injection peut se faire soit par *intra-veineuse*, soit par injection intra-artérielle à partir d'un cathéter[1]. L'introduction d'un cathéter et son guidage jusqu'à l'artère d'intérêt permet au médecin de n'injecter que localement le produit de contraste : l'examen est, bien sûr, plus invasif qu'une *intra-veineuse* mais la quantité de produit de contraste utilisée est moins importante et surtout la qualité de l'image

[1] Tuyau fin et long qui peut être introduit dans les artères

est meilleure car la visualisation n'est pas perturbée par l'opacification d'artères et/ou de veines proches et le produit de contraste est nettement moins dilué dans le sang. En angiographie, une *image injectée* est prise alors que le produit de contraste est présent dans le corps du patient (Figure 14-2). Par opposition, une *image non-injectée* est prise sans utilisation de produit de contraste (Figure 14-1). L'image non-injectée est utilisée comme un masque sur l'image injectée afin d'obtenir l'image soustraite (Figure 14-3).

Cette technique d'angiographie est utilisée dans tout le corps : membres (Figure 15), abdomen, rachis, cœur, cou, tête. Sa mise en œuvre par cathétérisme et son association avec les possibilités d'imagerie en temps réel des systèmes portant une chaîne image ont de plus donné naissance à des techniques chirurgicales de soin des pathologies vasculaires : l'angiographie est alors dite *interventionnelle (Kerrien 2000).*

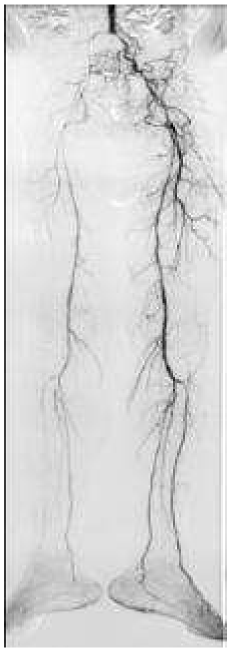


Figure 15: Angiographie soustraite, membres inférieures

3.2.2 La fluoroscopie

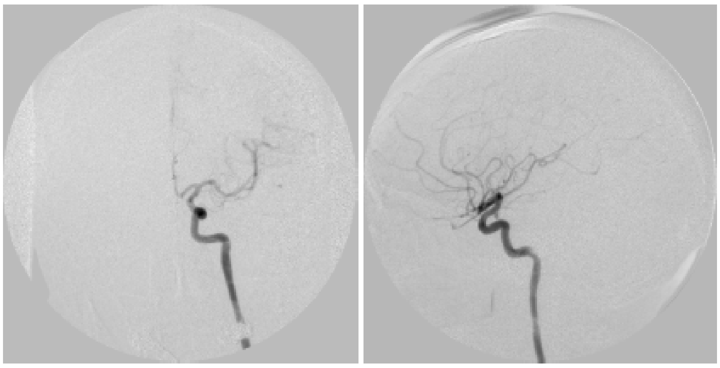
La fluoroscopie est également une modalité statique qui consiste à faire une acquisition de l'image en temps réel à différentes vitesses : 7,5 fps, 15 fps ou bien 30 fps (Images par seconde). De ce fait, la dose de rayons X est réduite afin de minimiser leurs effets néfastes. Ce type d'acquisition permet de suivre la propagation du produit de contraste dans la zone d'intérêt. En général, une séquence dure entre 10 et 15 seconds *(Gorges 2007)* et passe par les phases suivantes (Figure 16) :

- **La phase artérielle :** seules les artères sont injectées. On y distingue deux sous-phases : une sous-phase précoce qui correspond à la montée du produit de contraste dans les artères (1 à 2 secondes) et une sous-phase tardive pendant les 2 à 3 secondes de stabilité du produit de contraste.

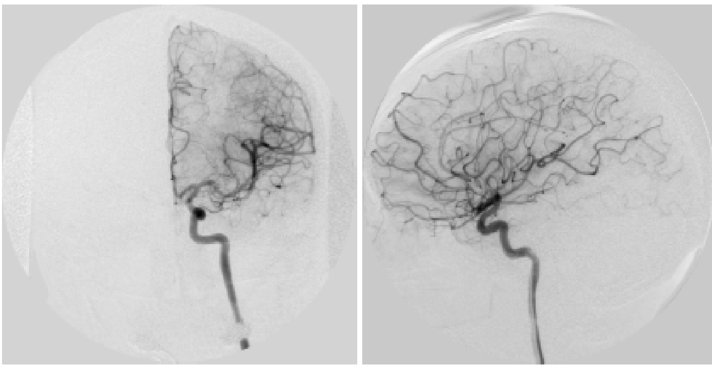
- **La phase parenchymateuse** : le produit de contraste diffuse dans les tissus cérébraux (2 secondes).

- **La phase veineuse :** correspond à l'évacuation par les veines du sang alimentant les tissus.

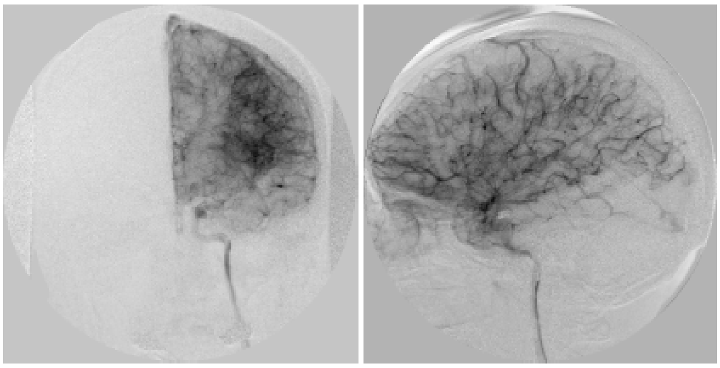
Vue de face Vue de profil



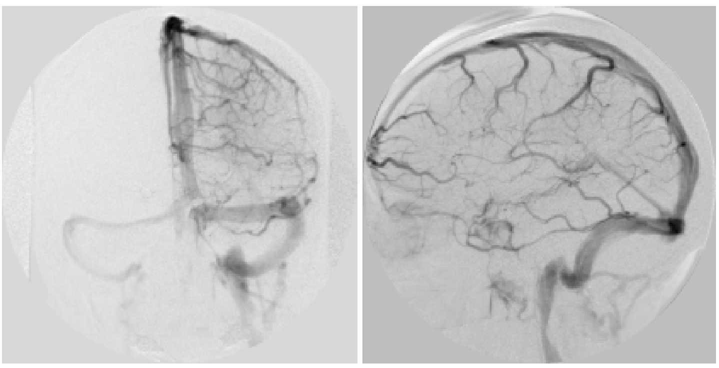
(a) Temps artériel précoce : arrivée du produit de contraste



(b) Temps artériel tardif : fin du remplissage des artères



(c) Temps parenchymateux : diffusion du sang dans les tissus



(d) Temps veineux : drainage du sang par les veines

Figure 16: Diffusion du produit de contraste dans le cerveau

3.2.3 L'imagerie tridimensionnelle (Innova 3D)

L'imagerie tridimensionnelle est une modalité de type dynamique dans laquelle l'organe d'intérêt est représenté en 3D grâce à des techniques de reconstruction tomographique (Figure 17). Cette modalité est réalisée en deux temps : une première acquisition rotationnelle 2D est effectuée sans injection de produit de contraste (acquisition des images masques), puis le robot revient à sa position initiale et une deuxième acquisition rotationnelle 2D est effectuée mais cette fois avec injection de produit de contraste (acquisition des images injectées). La capture de cette série d'images 2D est effectuée sur 200 degrés à la vitesse angulaire de 40 °/s à une cadence de 30 fps. Pendant les 5 secondes que dure l'acquisition, 150 images sont acquises. Il faut noter que pour permettre la soustraction d'images, les positions auxquelles les images sont prises pendant la première rotation doivent rester les mêmes pendant la deuxième. Ce qui veut dire que le positionnement du robot doit être extrêmement répétable *(Kerrien 2000).*

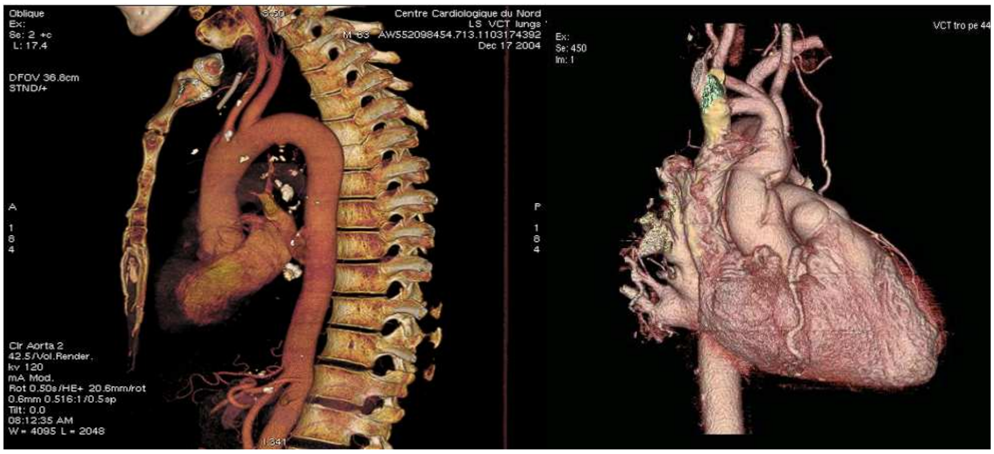


Figure 17: Reconstruction 3D

Grâce à la visualisation 3D, le médecin peut visualiser pendant l'intervention l'artère qu'il est en train d'explorer. Cette technique peut servir également pour les contrôles post-opératoires, par exemple pour vérifier l'évolution de la taille d'un anévrisme[2]. De plus, elle permet l'acquisition d'images de coupe à l'instar de celles réalisées par un scanner CT.

[2] Dilatation segmentaire d'une artère à l'origine d'une cavité remplie de sang et de caillots.

4 Motivation et objectifs des travaux de thèse

D’un point de vue purement applicatif, l’analyse des modalités de radiologie interventionnelle présentées précédemment, fait ressortir deux aspects essentiels pour l’amélioration des performances des robots d’imagerie médicale et en conséquence la qualité des soins pour le confort du patient et du médecin.

- Le premier aspect est la vitesse de fonctionnement du robot. Nous avons vu que les modalités d’angiographie nécessitent l’injection d’un produit de contraste qui a une durée de vie limitée (de 10 à 15 seconds). Ce qui veut dire que la vitesse est un enjeu majeur impactant directement le nombre d’images réalisées. En outre, une augmentation de la vitesse de mouvement permet de réduire le temps d’immobilisation du patient ce qui améliorera de façon importante le temps d’intervention et plus particulièrement dans le cas des traitements infantiles.

- Le deuxième point est la répétabilité du robot. En effet, nous avons vu que la réalisation d’une imagerie tridimensionnelle nécessite une double acquisition de la même vue pendant le mouvement du robot. Ce qui introduit des contraintes importantes en termes de répétabilité et de précision dans le positionnement du robot.

Par ailleurs, la nouvelle génération de robots positionneurs suspendus au plafond impose des contraintes très sèvres en termes de réduction de la masse totale du système. Inévitablement, cela a un impact négatif sur la rigidité de la structure mécanique, engendrant ainsi des modes de vibrations en basse fréquence, qui coïncident souvent avec les bandes passantes des boucles d’asservissement du robot.

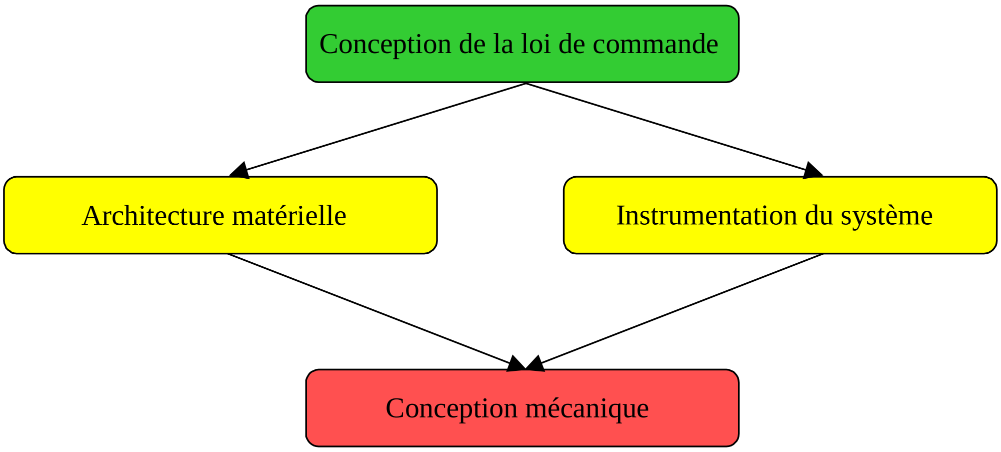


Figure 18: Impact des actions correctives

Du point de vue de l’Automatique, la problématique de commande des robots flexibles reste toujours d’actualité *(Boverie, Dan Cho et al. 2008)*. Elle relève plusieurs défis particulièrement quand elle s’inscrit dans le cadre d’amélioration de systèmes existants, où le champ d’action de l’automaticien se limite uniquement à la conception de la loi de commande. En effet, la marge de manœuvre dans ce cas est tributaire de l'architecture matérielle de l'architecture de commande ainsi que de l'instrumentation du système. C'est pourquoi, il est tout à fait légitime dans un cadre industriel d'explorer les différentes possibilités de commande avant d'envisager des modifications matérielles ou encore celle de la conception mécanique qui sont nécessairement très onéreuses et lentes (Figure 18).

Rappelons que dans le cadre de la conception d'une loi de commande, nous sommes face à trois actions correctives, à savoir, la trajectoire, l'anticipation et le correcteur permettant de rester sur la trajectoire de référence (Figure 19).

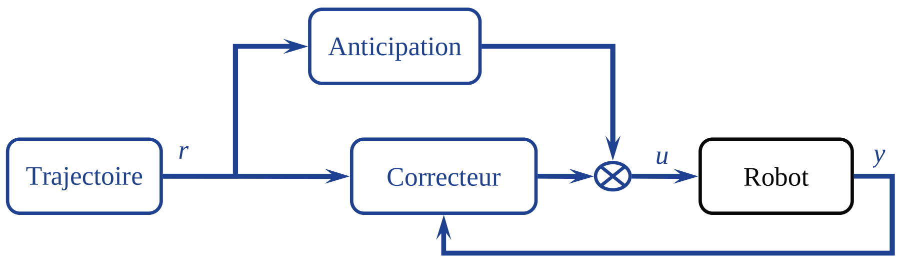


Figure 19: Schéma de régulation

La motivation de ce travail de thèse se place dans le cadre de la conception d'une loi de commande pour un robot multiaxe comportant des modes oscillants ayant plusieurs origines : souplesse de la structure, liaisons, élasticité dans les chaînes de transmission ou encore élasticité de la suspension (cas d'un accrochage au plafond). Comme il sera mis en évidence dans la phase de modélisation (Chapitre II), les difficultés à prendre compte seront :

- les variations paramétriques (en particulier les fréquences des modes souples) dues aux changements de configuration : centre de masse, les matrices d'inertie …
- les incertitudes de raideur et d'amortissement des modes oscillants.

Une des difficultés importantes concerne l'amortissement des modes flexibles, très visibles en particulier dans les phases de démarrage et d'arrêt.

Notons en particulier que la maîtrise de ces modes dans les phases d'arrêt revêt un caractère particulièrement important :

- d'une part pour améliorer la rapidité de prises de vue ; lors des positionnements les opérateurs doivent attendre la fin des oscillations pour démarrer les cycles de prise d'images,
- d'autre part pour la sécurité vis-à-vis des personnes évoluant dans l'espace de travail du robot, les normes imposent une distance d'arrêt inférieure à 10 mm.

A titre illustratif, la figure 20 montre le profil d'arrêt avec les spécifications imposées. Les amplitudes définissent le niveau de vibrations, il est cependant possible de prendre des images sous réserve que l'amplitude des vibrations soit inférieure à 0,2 mm. En particulier, on peut remarquer les contraintes suivantes :

– Distance d'arrêt, inférieure à 10 mm.

– Amplitude des vibrations après 1 seconde, suite à la première oscillation, inférieure à 0,2 mm.

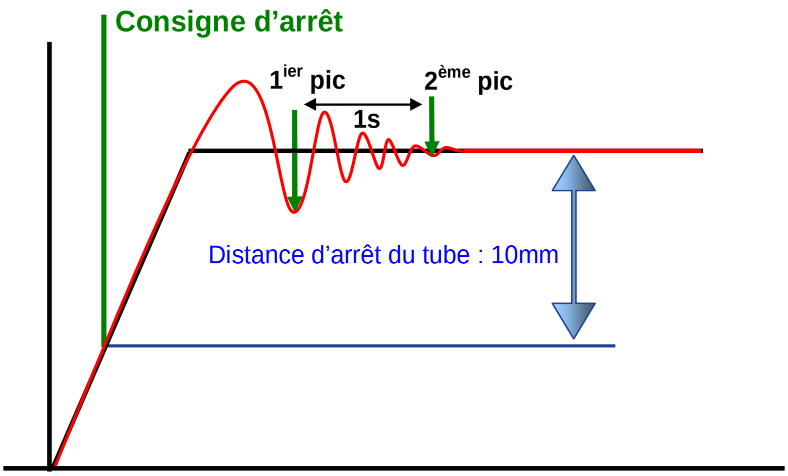


Figure 20: Spécifications du profil d'arrêt

Une motivation présente dans tout ce travail de thèse est la mise en place d'une approche formalisée et méthodologique dans le cadre d'une application dans un environnement industriel.

Ce travail de mise en place d'une loi de commande comporte différentes composantes, à savoir la trajectoire, l'anticipation, et la correction. Il s'agira donc de bien mettre en évidence la contribution de chaque action **dans le cadre du contrôle des vibrations**. Les critères permettant d'évaluer ces différentes actions sont comme dans beaucoup de problèmes d'automatique la fiabilité, les performances, la robustesse mais aussi dans un contexte industriel la facilité d'implémentation. Les approches étudiées au cours de ce travail de thèse sont :

- **La génération de trajectoire**
  - Les techniques de filtrage passif
  - La technique de platitude
  - La technique de freinage en deux temps
- **L'anticipation**
  - La compensation du couple de charge
  - La compensation de la dynamique du mouvement rigide

  - La compensation de la dynamique des vibrations dérivée de la platitude

- **Le correcteur**
  - Les structures « classiques de commande d'axe » fondées sur une architecture cascade : courant, vitesse et position
  - La régulation par retour d'état et observateur
  - La synthèse H_∞

Dans le cadre des commandes multivariables, une difficulté importante concerne l'absence de mesures du côté de la charge. Cela nécessite la mise en place d'un observateur permettant de reconstituer les variables d'état non mesurées, en particulier celles liées aux modes flexibles. La mise en place d'un observateur conduit à la dégradation des marges de robustesse, aussi une étude a été effectuée en vue d'enrichir les mesures actuellement disponibles par des mesures d'accélération au niveau du tube.

Chapitre II

Méthodologie de modélisation statique et dynamique d'un robot poly-articulé

Chapitre II. Table des matières

1 Méthodologies de modélisation des robots

La modélisation est une phase indispensable dans le cycle de développement des systèmes mécatroniques et plus particulièrement dans le domaine de la robotique. Les modèles ainsi obtenus peuvent servir dans la phase de dimensionnement de la structure mécanique et de la chaîne de motorisation, pour l'étude des lois de commande, pour la planification des trajectoires, enfin pour la validation avant les essais expérimentaux. En outre, pour des raisons économiques et pour des raisons de sécurité, les industriels utilisent de plus en plus la simulation numérique fondée sur la mise en place de modèles mathématiques dans le but de tester la fiabilité des systèmes avant même la fabrication de prototypes.

Le développement d'un modèle de robot est une tâche délicate qui nécessite une rigueur importante, d'où le besoin de développer des méthodologies qui permettent d'assister l'automaticien dans la génération de modèles. Avant de démarrer cette phase, il est nécessaire d'analyser deux aspects importants.

- D'une part, la nature du modèle requis, à savoir, modèle de conception, de simulation, de commande, d'analyse ou encore d'identification. En effet, cette étape permet de définir les entrées et les sorties du modèle.

- D'autre part, analyser les modes de fonctionnement du système afin de ne modéliser que les dynamiques dominantes et en conséquence réduire la complexité du modèle. A titre d'exemple, dans des modes d'opération à basse vitesse les phénomènes vibratoires liés à la flexibilité des articulations et la flexibilité de la structure sont négligeables.

La réponse à ces questions permet d'orienter le travail de modélisation vers des méthodes adaptées à la spécificité du problème.

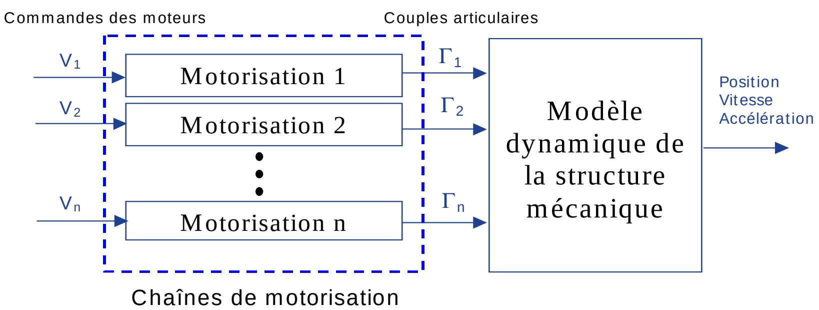


Figure 21 : modèle dynamique d'un robot poly-articulé

Dans un robot poly-articulé, nous pouvons définir deux sous-ensembles distincts, à savoir, la structure mécanique et les chaînes de motorisation (Figure 21). Bien que couplés, il est préférable d'effectuer la modélisation de chaque sous-ensemble d'une manière indépendante. En effet, le modèle dynamique de la structure mécanique est un modèle mathématique qui découle des lois de la mécanique telles que le principe fondamental de la dynamique. Il fournit la relation entre les couples ou les forces articulaires et les accélérations articulaires. Par ailleurs, le modèle des chaînes de motorisation comporte les éléments de conversion de puissance, tels que les moteurs électriques, les éléments de transmission de puissance, comme les réducteurs, et doit intégrer les phénomènes physiques comme les frottements et les élasticités de la chaîne de transmission.

Dans ce chapitre, il est présenté une méthodologie de modélisation des robots poly-articulés ainsi que son application sur les trois robots d'imagerie médicale qui ont fait l'objet de l'étude dans le cadre de cette thèse :

– Dans un premier temps, la problématique de la modélisation de la structure mécanique rigide sera abordée en considérant les couples en entrée des axes. Ensuite, les aspects liés à la modélisation des chaînes de motorisation seront abordés.

– Dans un deuxième temps, le modèle rigide sera complété par la prise en compte des souplesses dues à la structure et la chaîne de transmission. Cette prise en compte est un élément important en vue de reproduire le comportement vibratoire en particulier lors des phases de démarrage et d'arrêt.

Les méthodes et les outils exposés dans ce chapitre ont été utilisés pour définir et mettre en place un outil de CAO décrit en Annexe A, utilisant l'environnement Matlab-Simulink, en vue de faciliter le développement de modèles de robots.

2 Modèle rigide

2.1 Modélisation de la structure mécanique

L'étude du comportement mécanique d'un robot poly-articulé nécessite l'élaboration d'un modèle mathématique qui permet de définir une relation entre les efforts appliqués aux articulations et le profil du mouvement du robot (1).

$$\mathbf{\Gamma} = f(q, \dot{q}, \ddot{q}, F_e) \tag{1}$$

avec : $\mathbf{\Gamma}$: vecteur des couples ou forces articulaires
q : vecteur des positions articulaires
$\dot{q}$: vecteur des vitesses articulaires
$\ddot{q}$: vecteur des accélérations articulaires
F_e : vecteur des efforts extérieurs appliqués sur le robots

Deux méthodes de calcul peuvent être envisagées pour l'élaboration du modèle dynamique d'un robot, à savoir, la méthode de Newton-Euler ou bien la méthode issue des équations de Lagrange *(Khalil and Dombre 1999; Poignet, Gautier et al. 2002)*. Selon le type de modèle, une méthode pourra être privilégiée par rapport à l'autre. A titre d'exemple, si l'objectif de la modélisation est de déterminer la distribution des efforts dans les articulations pendant les mouvements, il est préférable d'utiliser la méthode de Newton-Euler car elle permet de calculer les efforts dans toutes les directions au niveau des articulations. En revanche, si l'objectif est d'établir des modèles destinés à la simulation de mouvements ou bien à l'étude des lois de commande, seules les informations sur l'axe du mouvement de l'articulation sont nécessaires, auquel cas l'utilisation de la méthode du Lagrangien est suffisante.

Dans le cadre de l'Automatique, nous recommandons l'utilisation de la méthode du Lagrangien. En effet, elle permet d'établir des modèles suffisamment riches pour l'analyse des lois de commande en termes de performances, stabilité ou encore robustesse. En outre, sa mise en œuvre est moins complexe comparée à la méthode de Newton-Euler.

2.1.1 Modèle géométrique

La première étape dans l'élaboration d'un modèle d'un robot manipulateur, consiste à définir son modèle géométrique. Ce dernier permet de simuler l'évolution de la position du robot dans l'espace de travail en fonction des variables articulaires (Figure 22).

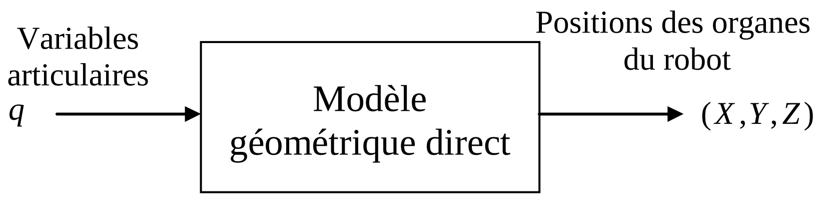


Figure 22 : Modèle géométrique

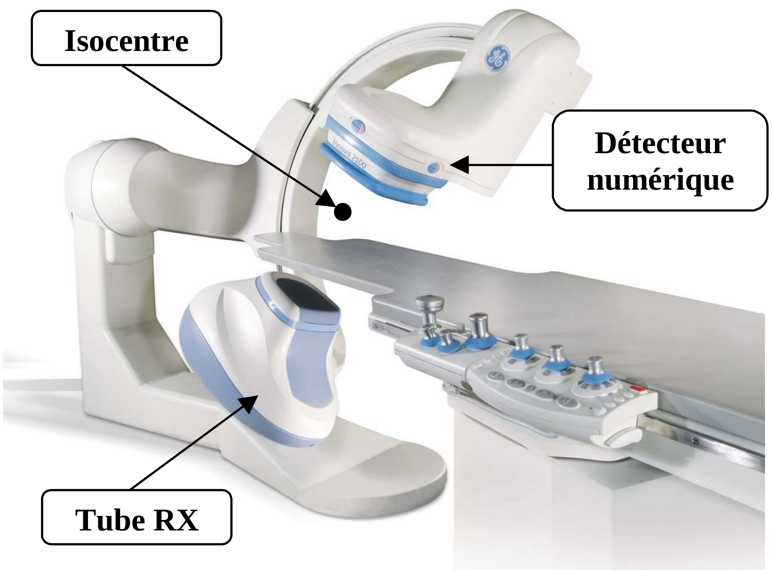


Figure 23 : Robot Innova GEHC, 4 degrés de libertés

Les robots poly-articulés peuvent être déclinés en trois classes principales (*Liégeois 2001*), à savoir, les robots à chaîne ouverte simple (Figure 23), les robots parallèles (Figure 24) et les robots mixtes, contenant des chaînes ouvertes ainsi que des boucles fermées (Figure 25) :

- dans les structures à chaîne ouverte simple, appelées série, le graphe est arborescent, la base étant la racine et les feuilles étant les organes terminaux,
- dans les structures parallèles toutes les chaînes partent de la base pour aller vers l'organe terminal,
- les structures à chaîne fermée, appelé mixte, présentent des boucles cinématiques, par exemple des parallélogrammes.

Chaque classe de robots nécessite une approche de modélisation particulière. Les robots utilisés en radiologie médicale font partie de la famille des robots à chaine ouverte simple. De ce fait, dans la suite de ce mémoire, seule cette morphologie sera précisément étudiée.

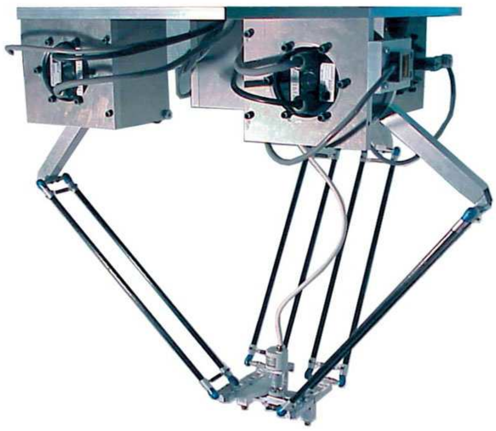


Figure 24 : Robot Parallèle H4, 4 degrés de libertés

Figure 25 : Robot à chaine fermée IRB 660, 4 degrés de libertés

2.1.1.1 Paramétrage

L'élaboration du modèle géométrique d'un robot nécessite la définition du repère lié à chaque corps. Une affectation judicieuse des repères et du paramétrage associé permet de simplifier considérablement le modèle résultant. Dans la littérature, plusieurs travaux traitent cette problématique. Une méthode très répandue est l'approche de **Khalil-Kleinfinger** qui est une variante de la méthode de Denavit-Hartenberg adaptée pour répondre plus précisément à la problématique des robots à chaîne complexe arborescente ou fermée *(Khalil et Kleinfinger 1986; Dequidt, Bernier et al. 2003)*. L'intérêt de cette méthode est qu'elle permet d'exprimer le passage entre deux repères en utilisant un nombre minimum de paramètres appelés paramètres géométriques.

Dans la méthode de Khalil-Kleinfinger, l'affectation des repères se fait en se basant sur les deux règles suivantes :

- L'axe z_j est porté par l'axe de l'articulation j c'est-à-dire l'axe de rotation pour une articulation rotoïde ou l'axe de translation pour une articulation prismatique.
- L'axe x_j est porté par la perpendiculaire commune aux axes z_j et z_{j+1}, le choix de x_j n'est pas unique si z_j et z_{j+1} sont parallèles ou colinéaires.

Ainsi, cette procédure permet de définir le repère $R_j(O_j, x_j, y_j, z_j)$, lié au corps C_j. Enfin, le repère R_0 qui correspond au repère absolu est, quant à lui, lié au bâti.

La figure 26 montre un exemple d'affectation des trois axes de rotation du robot Puma.

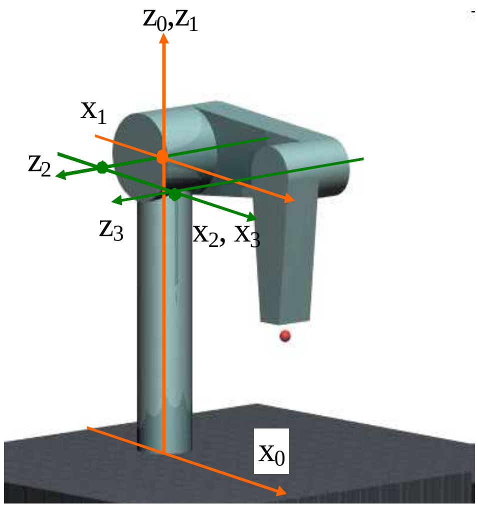


Figure 26: Exemple d'affectation des repères d'un robot Puma

Une fois les repères affectés, les paramètres géométriques (Figure 27) sont définis de la façon suivante :

- α_j l'angle entre les axes $z_{j\text{-}1}$ et z_j autour de $x_{j\text{-}1}$
- d_j la distance entre $z_{j\text{-}1}$ et z_j le long de $x_{j\text{-}1}$
- θ_j l'angle entre les axes $x_{j\text{-}1}$ et x_j autour de z_j
- r_j la distance entre $x_{j\text{-}1}$ et x_j le long de z_j

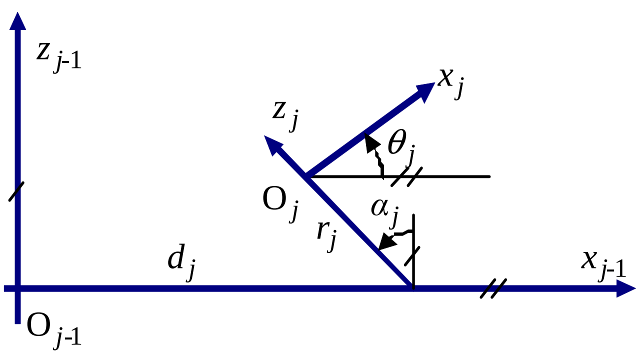


Figure 27 : Paramètres géométrique dans le cas d'une structure ouverte simple

Finalement, la matrice de passage entre le repère R_j et R_{j-1} s'exprime comme une succession d'opérations de translation et de rotation dans l'espace, en fonction de ces quatre paramètres géométriques :

$$^{j-1}T_j = \mathrm{Rot}(x,\alpha_j)\cdot \mathrm{Trans}(x,d_j)\cdot \mathrm{Rot}(z,\theta_j)\cdot \mathrm{Trans}(z,r_j) \tag{2}$$

où $\mathrm{Rot}(\cdot)$ et $\mathrm{Trans}(\cdot)$ sont respectivement des opérateurs de rotation et de translation (Annexe B).

On déduit ainsi la forme de la matrice de passage des repères j à $j-1$:

$$^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) & 0 & d_j \\ \cos(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \cos(\alpha_j)\cos(\theta_j) & -\sin(\alpha_j) & -r_j\sin(\alpha_j) \\ \sin(\alpha_j)\sin(\theta_j) & \sin(\alpha_j)\cos(\theta_j) & \cos(\alpha_j) & r_j\cos(\alpha_j) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(^{j-1}\mathbf{R}_j\right)_{3\times 3} & \left(^{j-1}\mathbf{P}_j\right)_{3\times 1} \\ 0_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

avec : $^{j-1}\mathbf{R}_j$ la matrice de rotation qui définit l'orientation du repère R_j par rapport à R_{j-1}, $^{j-1}\mathbf{P}_j$ le vecteur de position qui définit les coordonnées de O_j dans R_{j-1}.

La matrice de passage entre un repère j et un repère k, s'obtient en utilisant la formule suivante :

$$^kT_j = {}^kT_{k+1}\,{}^{k+1}T_{k+2}\cdots{}^{j-1}T_j \tag{3}$$

Ainsi, l'expression du point $\mathbf{P}_j \in R_j$ dans le repère R_k est donnée par : $P_k = {}^kT_j \cdot P_j$.

Les variables articulaires du robot sont regroupées dans un vecteur q, de dimension égale au nombre de degrés de liberté du robot, dont les composantes sont définies de la façon suivante :

$$q_j = \theta_j \cdot (1-\sigma_j) + r_j \cdot \sigma_j \tag{4}$$

avec :

- $\sigma_j = 0$ si l'articulation est rotoïde, i.e. une rotation de type pivot à un degré de liberté (Figure 28);
- $\sigma_j = 1$ si l'articulation est prismatique i.e. une translation de type glissière à un degré de liberté (Figure 29).

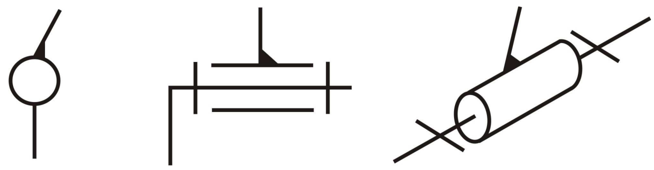


Figure 28 : Représentation 2D et 3D de la liaison rotoïde

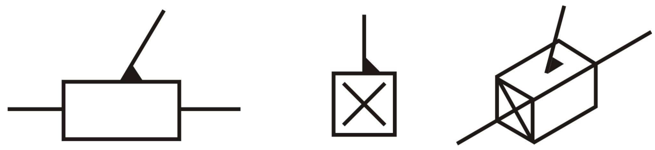


Figure 29 : Représentation 2D et 3D de la liaison prismatique

En somme, le modèle géométrique du robot, qui permet de déterminer la position de chaque corps du robot dans l'espace de travail (repère absolu), est défini par la matrice de passage ${}^{0}T_{k}$ où k est l'identifiant de corps en question. Il est important de noter que le modèle géométrique est unique. Par ailleurs, ce dernier rentre dans le calcul du modèle géométrique inverse qui permet de définir les positions articulaires en fonction de l'orientation et la position souhaitées du détecteur.

La méthode de paramétrage précédente associée à la modélisation des chaînes de motorisation, décrite dans la suite, a conduit à la mise en place d'un outil de calcul permettant de faciliter la définition paramétrique et la modélisation géométrique des robots (Annexe A).

2.1.2 Modélisation des robots de positionnement vasculaire

L'objet de cette section est d'établir les modèles géométriques des robots Innova Frontal et Latéral ainsi que du robot Agility présentés dans le chapitre précédent.

2.1.2.1 Le robot Innova Frontal

Le robot Innova Frontal est fixé au sol, sa structure est montrée par la représentation de la figure 30. Ce robot comporte quatre corps rigides et il est doté de quatre degrés de liberté :

- C_1 : le bras (L-arm) avec une variable articulaire rotoïde θ_1
- C_2 : Le pivot (Pivot) avec une variable articulaire rotoïde θ_2
- C_3 : L'arceau (C-arc) avec une variable articulaire rotoïde θ_3
- C_4 : L'ascenseur (Detector lift) avec une variable articulaire prismatique r_4

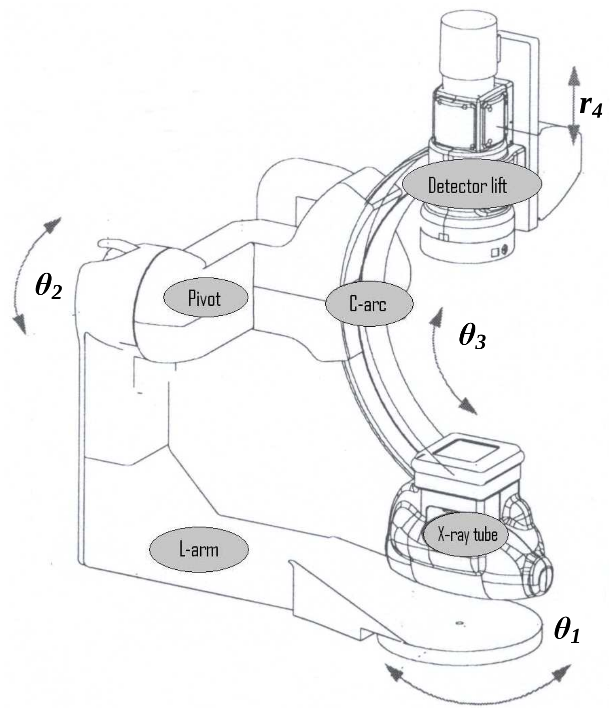


Figure 30 : Robot Innova frontal

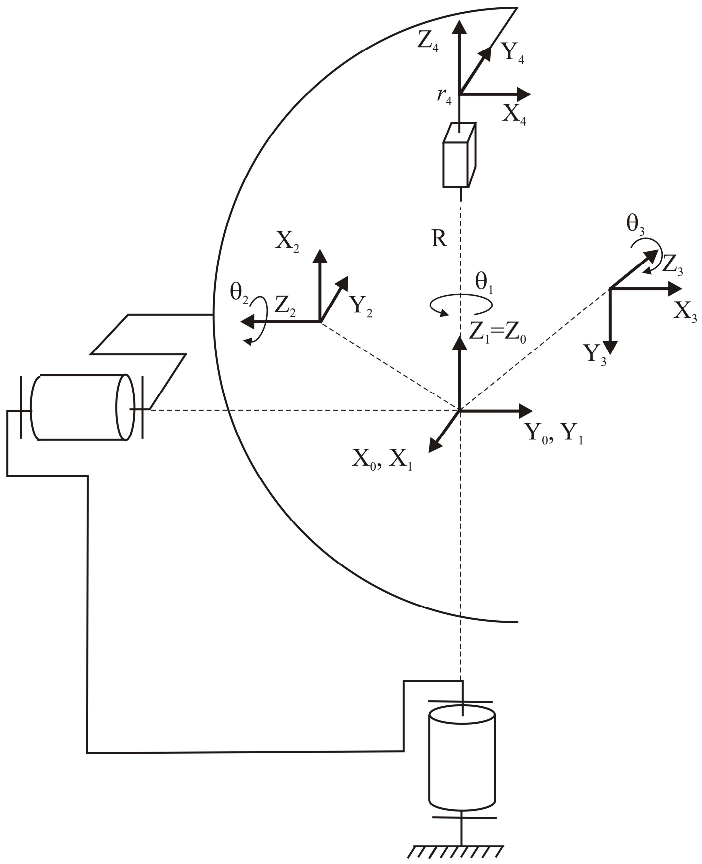


Figure 31 : Affectation des repères sur le robot Innova frontal

En utilisant la notation de Khalil-Kleinfinger, on procède dans une première étape à la définition des repères fixes par rapport à chaque corps. Dans une deuxième étape, les matrices de changement de repères son calculées. La figure 31 montre le schéma cinématique de ce robot et l'affectation des repères associés. On peut remarquer que les repères R_0, R_1, R_2 et R_3 ont pour origine l'isocentre[3]. Le tableau 1 donne les paramètres géométriques des différents corps de ce robot.

j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	0	0	θ_1	0
2	0	$\pi/2$	0	$\theta_2+\pi/2$	0
3	0	$-\pi/2$	0	$\theta_3+\pi/2$	0
4	1	$\pi/2$	0	0	r_4+R

Tableau 1 : Paramètres géométriques du robot LCA.

L'implémentation de l'algorithme de modélisation géométrique, en utilisant un outil de calcul formel, permet d'automatiser la procédure de calcul. A titre d'exemple, les matrices de changement de repères obtenues pour le robot Innova Frontal sont :

$$ {}^0T_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^2T_3 = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_3) & -\cos(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cos(\theta_3) & -\sin(\theta_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -r_4-R \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

En conséquence :

$$ {}^0T_4 = \begin{bmatrix} -C(\theta_1)S(\theta_2)S(\theta_3)-S(\theta_1)C(\theta_3) & -C(\theta_1)C(\theta_2) & C(\theta_1)S(\theta_2)C(\theta_3)-S(\theta_1)S(\theta_3) & P_x \\ -S(\theta_1)S(\theta_2)S(\theta_3)+C(\theta_1)C(\theta_3) & -S(\theta_1)C(\theta_2) & S(\theta_1)S(\theta_2)C(\theta_3)+C(\theta_1)S(\theta_3) & P_y \\ -C(\theta_2)S(\theta_3) & S(\theta_2) & C(\theta_2)C(\theta_3) & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

avec $S(\cdot)=\sin(\cdot)$; $C(\cdot)=\cos(\cdot)$ et :

- $P_x = \left(C(\theta_1)S(\theta_2)C(\theta_3)+S(\theta_1)S(\theta_3)\right)\cdot(r_4+R)$

[3] Isocentre : point d'intersection des trois axes de rotations L_arm, Pivot et C_arc.

- $P_y = \left(S(\theta_1)S(\theta_2)C(\theta_3) + C(\theta_1)S(\theta_3)\right)\cdot(r_4 + R)$
- $P_z = \left(C(\theta_2)C(\theta_3)\right)\cdot(r_4 + R)$

La matrice ${}^0T_4 = {}^0T_1\,{}^1T_2\,{}^2T_3\,{}^3T_4$ ainsi obtenue permet d'exprimer l'orientation et la position du détecteur par rapport à l'espace de travail, soit dans le repère absolu, en fonction des positions articulaires. Le repérage par rapport au patient porté par la table (mobile) est ainsi obtenu par la connaissance des positions respectives du robot et de la table dans le repère absolu.

2.1.2.2 Le robot Biplan Latéral

Le robot Biplan Latéral est un positionneur suspendu au plafond ayant une structure arborescente (Chapitre I- Figure 10). Le schéma cinématique de ce robot est représenté sur la figure 32, il comporte deux corps terminaux : le tube (C4) et le détecteur (C5). Sa modélisation géométrique peut être ramenée à la modélisation d'un robot à chaîne ouverte simple si chaque corps terminal est considéré indépendamment de l'autre. Il ainsi possible de mettre en évidence deux chaînes ouvertes, la première étant constitué par les corps C0, C1, C2, C3 et C4 et la deuxième par les corps C0, C1, C2, C3 et C5.

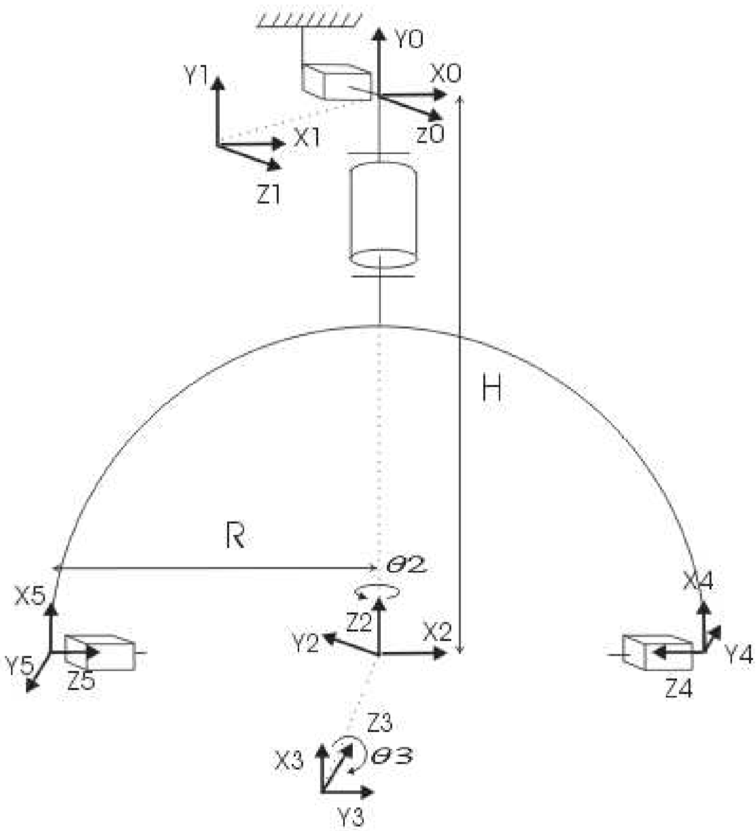


Figure 32 : Schéma cinématique et paramétrage du robot Biplan Latéral

Les paramètres géométriques du robot Biplan Latéral sont donnés dans le tableau 2 où a_j représente le corps qui précède le corps j.

j	a_j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	1	0	0	0	r_1
2	1	0	$-\pi/2$	0	θ_2	H
3	2	0	$-\pi/2$	0	$\theta_3-\pi/2$	0
4	3	1	$\pi/2$	0	0	R_4-R
5	3	1	$-\pi/2$	0	0	R_5-R

Tableau 2 : Paramètres géométriques du robot Biplan Latéral

2.1.2.3 Le robot Agility

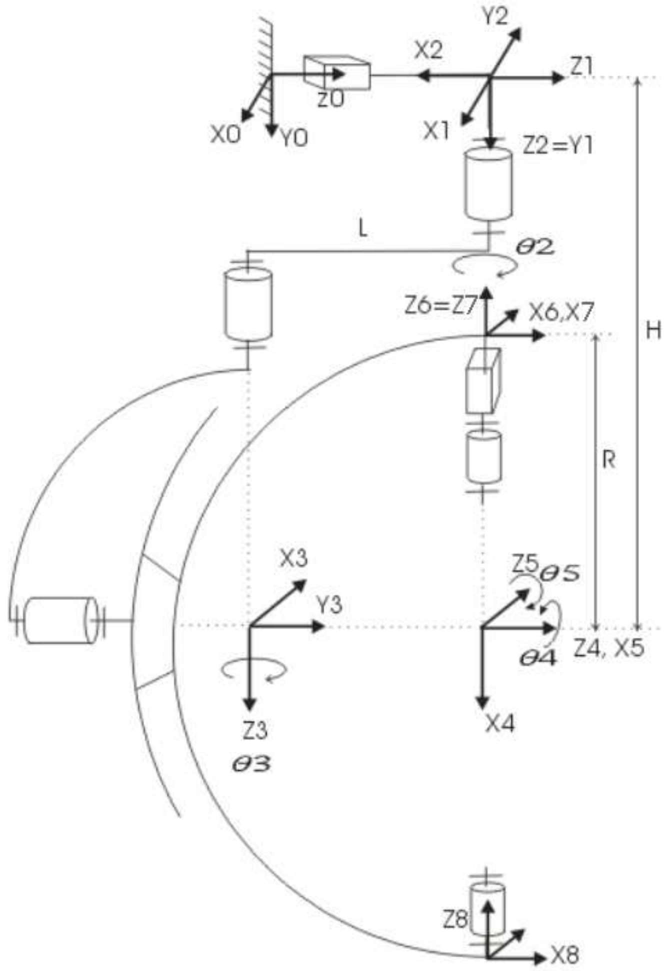


Figure 33 : Affectation des repères sur le robot Agility

Le robot Agility a, également, une structure arborescente (Chapitre I-Figure 11) avec deux corps terminaux : le tube (C8) et le détecteur (C7). Son schéma cinématique est représenté sur la figure 33 et le paramétrage associé est donné dans le tableau 3. On peut noter sur ce robot que la rotation du Carc autour de l'axe Z5 est réalisée par le coulissement d'un chariot sur un rail circulaire porté par un support fixé au pivot. Ce mécanisme est caractérisé par une double translation en vue de permettre un débattement important de la chaîne d'image. Le chariot peut glisser sur le support fixé au pivot (Carc intérieur) et sur le bras portant la chaîne image (Carc extérieur).

D'une manière analogue à celle du biplan latéral, la modélisation géométrique d'Agility peut être ramenée à la modélisation d'un robot à chaîne ouverte simple.

j	a_j	σ_j	α_j	d_j	θ_j	r_j
1	0	1	0	0	0	r_1
2	1	0	$-\pi/2$	0	$\theta_2+\pi/2$	0
3	2	0	0	L	$\theta_3+\pi/2$	H
4	3	0	$-\pi/2$	0	$\theta_4-\pi/2$	L
5	4	0	$-\pi/2$	0	$\theta_5-\pi/2$	0
6	5	1	$\pi/2$	0	0	r_6+R
7	6	0	0	0	θ_6	0
8	5	0	$\pi/2$	0	θ_8	$-R$

Tableau 3 : Paramètres géométriques du robot Agility

2.1.3 Modèle dynamique

Dans cette section, la méthode de Lagrange est rappelée. Cette méthode permet la modélisation dynamique des robots multiaxes. Le Lagrangien est défini comme étant la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du robot :

$$\mathrm{L}(q,\dot{q}) = \mathrm{E}(q,\dot{q}) - \mathrm{U}(q) \tag{5}$$

avec :

- $\mathrm{E}(q,\dot{q})$: énergie cinétique totale du système
- $\mathrm{U}(q)$: énergie potentielle totale du système.

L'équation du mouvement du robot est définie selon le formalisme de Lagrange par la relation (6) :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathrm{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathrm{L}(q,\dot{q})}{\partial q} = \mathbf{\Gamma} \tag{6}$$

où $\mathbf{\Gamma}$ représente le vecteur des couples et des forces externes.

Les équations de mouvement ainsi obtenues peuvent être reformulées sous une forme matricielle qui met en évidence la structure de l'équation différentielle du deuxième ordre qui régit le mouvement du robot.

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}(q)\cdot\ddot{q} + \mathbf{C}(q,\dot{q}) + \mathbf{Q}(q) \tag{7}$$

avec :

- $\mathbf{A}(q)$: matrice d'inertie du robot
- $\mathbf{C}(q,\dot{q})$: vecteur des couples et des forces de Coriolis et des forces centrifuges
- $\mathbf{Q}(q)$: vecteur des couples et des forces de gravité

En somme, l'utilisation de la méthode de Lagrange peut se résumer en quatre étapes :

1. Calcul de l'énergie cinétique du robot $\mathrm{E}(q,\dot{q})$
2. Calcul de l'énergie potentielle du robot $\mathrm{U}(q)$
3. Calcul de l'équation du mouvement du robot
4. Formulation matricielle du modèle dynamique

Dans la suite, la méthodologie de calcul du modèle dynamique sera explicitée suivant ces différents points.

2.1.3.1 Calcul de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique totale du robot est égale à la somme des énergies cinétiques de chaque segment du robot :

$$\mathrm{E}(q,\dot{q}) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}_j(q,\dot{q}) \tag{8}$$

où $\mathrm{E}_j(q,\dot{q})$ désigne l'énergie cinétique du segment j :

$$E_j(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\left({}^j\boldsymbol{\omega}_j^{T}\,{}^j\mathbf{J}_j\,{}^j\boldsymbol{\omega}_j + {}^j\mathbf{V}_j^{T}\,{}^jM_j\,{}^j\mathbf{V}_j + 2\,{}^j\mathbf{MS}_j^{T}\left({}^j\mathbf{V}_j \times {}^j\boldsymbol{\omega}_j\right)\right) \tag{9}$$

avec :

${}^j\boldsymbol{\omega}_j$: vitesse de rotation du segment j exprimée dans le repère R_j

${}^j\mathbf{V}_j$: vitesse du point O_j (par rapport au repère absolu) exprimée dans le repère R_j

M_j : masse du segment j

${}^j\mathbf{J}_j$: matrice d'inertie du segment j exprimée dans le repère R_j

${}^j\mathbf{MS}_j = \mathrm{M}_j \cdot {}^j\mathbf{G}_j$: premier moment d'inertie du segment j, ${}^j\mathrm{G}_j$ étant son centre de gravité exprimée dans le repère R_j.

On note que les paramètres inertiels M_j, ${}^j\mathbf{J}_j$ et ${}^j\mathbf{MS}_j$ sont constants puisque ces trois grandeurs ne dépendent que de la forme géométrique du segment ainsi que de la répartition de sa masse. Ils sont définis d'une manière standard pour chaque segment tels que :

$$ {}^j\mathbf{J}_j = \begin{bmatrix} XX_j & XY_j & XZ_j \\ XY_j & YY_j & YZ_j \\ XZ_j & YZ_j & ZZ_j \end{bmatrix} \; ; \; {}^j\mathbf{MS}_j = \begin{bmatrix} MX_j \\ MY_j \\ MZ_j \end{bmatrix} $$

Pour calculer ${}^j\boldsymbol{\omega}_j$ et ${}^j\mathbf{V}_j$, on peut procéder de manière itérative en partant de $j = 0$ jusqu'à $j = n$. En effet, nous avons :

$$ {}^j\boldsymbol{\omega}_j = {}^j\mathbf{R}_{j-1}\,{}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} + \bar{\sigma}_j \dot{\mathbf{q}}_j e_z \tag{10} $$

$$ {}^j\mathbf{V}_j = {}^j\mathbf{R}_{j-1}\left({}^{j-1}\mathbf{V}_{j-1} + {}^{j-1}\boldsymbol{\omega}_{j-1} \times {}^{j-1}\mathbf{P}_j\right) + \sigma_j \dot{\mathbf{q}}_j e_z \tag{11} $$

avec :

${}^j\mathbf{R}_{j-1}$: matrice de rotation du segment $j-1$ par rapport au segment j

${}^{j-1}\mathbf{P}_j$: coordonnées (position) de O_j exprimée dans le repère $\mathbf{R}_{j-1}$

e_z : vecteur unitaire suivant l'axe z_j

σ_j : type d'articulation ; 1 prismatique, 0 rotoïde ($\bar{\sigma}_j = 1 - \sigma_j$)

Error!

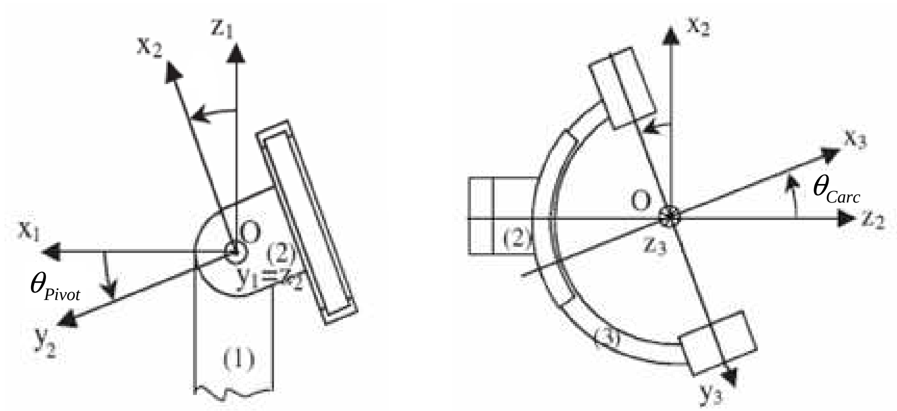


Figure 34 : Axes Pivot et Carc du robot Innova Frontal

Pour illustrer cette méthodologie de modélisation, nous reprenons l'exemple du Robot Innova Frontal. Nous nous intéresserons plus précisément au modèle deux axes : Pivot-Carc, dont le paramétrage est donné sur la figure 34. En effet, ce modèle est très pertinent car ses deux axes sont utilisés pratiquement dans toutes les modalités proposées par le robot Innova.

Le calcul de l'énergie cinétique est donné par la relation (8), il suffit de calculer ${}^j\boldsymbol{\omega}_j$ et ${}^j\mathbf{V}_j$ des deux axes Pivot et Carc en utilisant les équations (10) et (11).

Sachant que ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_0 = \mathbf{0}$ et ${}^{0}\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$, et en considérant fixe le Larm (C1), soit ${}^{1}\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$ et ${}^{1}\mathbf{V}_1 = \mathbf{0}$, nous obtenons après calcul :

- ${}^{2}\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^T$ et ${}^{3}\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_3)\cdot\dot{\theta}_2 & \sin(\theta_3)\cdot\dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T$
- ${}^{2}\mathbf{V}_2 = \mathbf{0}$ et ${}^{3}\mathbf{V}_3 = \mathbf{0}$

L'énergie cinétique de chaque segment pourra être ainsi calculée en utilisant la relation (9) (la relation obtenue étant assez conséquente, elle n'est pas explicitée dans ce document).

2.1.3.2 Calcul de l'énergie potentielle

De la même façon, l'énergie potentielle totale du robot est égale à la somme des énergies potentielles de chaque segment du robot :

$$\mathrm{U}(q) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{U}_j(q) \tag{12}$$

où $\mathrm{U}_j(q)$ désigne l'énergie potentielle du corps j :

$$\mathrm{U}_j(q) = -\mathrm{M}_j \mathrm{g}\cdot\mathbf{e}_g\cdot{}^{0}\mathbf{G}_j = -\mathrm{M}_j \mathrm{g}\cdot\mathbf{e}_g\cdot{}^{0}\mathbf{T}_j \begin{bmatrix} {}^{j}\mathbf{G}_j \\ 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$\mathrm{U}_j(\mathbf{q}) = -\mathrm{M}\cdot\mathbf{e}_g\cdot{}^{0}\mathbf{T}_j \begin{bmatrix} {}^{j}\mathbf{MS}_j \\ \mathrm{M}_j \end{bmatrix} \tag{14}$$

Avec $\mathbf{e}_g$ la direction de la gravité exprimée dans le repère $\mathbf{R}_0$. Si nous reprenons l'exemple précédent du robot Innova 2 axes, nous obtenons :

- $\mathrm{U}_2 = \mathrm{g}\cdot\left(\cos(\theta_2)\cdot\mathrm{MX}_2 - \sin(\theta_2)\cdot\mathrm{MY}_2\right)$
- $\mathrm{U}_3 = \mathrm{g}\cdot\left(\cos(\theta_2)\cdot\cos(\theta_3)\cdot\mathrm{MX}_3 + \cos(\theta_2)\cdot\sin(\theta_3)\cdot\mathrm{MY}_3\right)$

2.1.3.3 Calcul de l'équation du mouvement du robot

L'équation de mouvement du robot est obtenue en utilisant l'expression (6) :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathrm{L}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathrm{L}(q,\dot{q})}{\partial q} = \mathbf{\Gamma}$$

Celle-ci peut être reformulée en tenant compte de la structure de $\mathrm{L}(q,\dot{q})$, ce qui nous donne finalement :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathrm{E}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathrm{E}(q,\dot{q})}{\partial q} + \frac{\partial \mathrm{U(q)}}{\partial q} = \mathbf{\Gamma} \tag{15}$$

En pratique, il est plus intéressant de calculer les équations du mouvement pour chaque axe séparément en remarquant que $\mathrm{E}(q,\dot{q})$ ne dépend pas de $q_i \quad i > j$. On définit alors :

$$^{j}\mathrm{E}_n(q,\dot{q}) = \sum_{i=j}^{n} \mathrm{E}_i(q,\dot{q}) \text{ et } {}^{j}\mathrm{U}_n(q) = \sum_{i=j}^{n} \mathrm{U}_i(q)$$

Ainsi, l'équation de mouvement de l'axe j est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\, {}^{j}\mathrm{E}_n(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_j}\right] - \frac{\partial\, {}^{j}\mathrm{E}_n(q,\dot{q})}{\partial q_j} + \frac{\partial\, {}^{j}\mathrm{U}_n(q)}{\partial q_j} = \mathbf{\Gamma}_j \tag{16}$$

Les relations obtenues et le modèle induit sont explicités dans la suite.

2.1.3.4 Formulation matricielle du modèle dynamique

Les équations de mouvement ainsi obtenues peuvent être regroupées sous la forme matricielle plus facile à manipuler, qui leur confère aussi un sens physique facile à interpréter (7) :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}(q)\cdot\ddot{q} + \mathbf{C}(q,\dot{q}) + \mathbf{Q}(q)$$

Le calcul des éléments $\mathbf{A}(q)$, $\mathbf{C}(q,\dot{q})$ et $\mathbf{Q}(q)$, peut se faire soit directement par l'identification des termes dans les équations du mouvement du robot (16); ou bien par un calcul direct en remarquant que :

$$\mathbf{A}(q) = \frac{\partial^2 \mathrm{E}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}^2} \tag{17}$$

$$\mathbf{C}(q,\dot{q}) = \dot{\mathrm{A}}(\mathrm{q})\cdot\dot{q} - \frac{\partial \mathrm{E}(q,\dot{q})}{\partial q} \tag{18}$$

Une écriture intéressante du vecteur $\mathbf{C}(q,\dot{q})$ consiste à le définir comme suit :

$$\mathbf{C}(q,\dot{q}) = \mathbf{F}(\mathrm{q})\cdot\dot{q}^2 + \mathbf{B}(\mathrm{q})\cdot\underline{\dot{q}\dot{q}} \tag{19}$$

avec :

$\mathbf{F}(\mathrm{q})$: matrice $n\times n$ des termes centrifuges

$\mathbf{B}(q)$: matrice $n\times n(n-1)/2$ des termes de Coriolis

$\dot{q}^2$: vecteur des carrés des vitesses articulaires $\dot{q}^2 = \begin{pmatrix} q_1^2 & \cdots & q_n^2 \end{pmatrix}^T$

$\underline{\dot{q}\dot{q}} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1\dot{q}_2 \cdots \dot{q}_1\dot{q}_n \; \dot{q}_2\dot{q}_3 \cdots \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n \end{pmatrix}^T$: vecteur des produits des vitesses croisées

Finalement, le vecteur des forces de gravité est défini à partir de l'énergie potentielle, tel que :

$$\mathbf{Q}(\mathrm{q}) = \frac{\partial \mathrm{U(q)}}{\partial q} \tag{20}$$

Pour le robot Innova, en conservant les axes Pivot et Carc, la mise en équation de l'approche de Lagrange conduit à un modèle dynamique décrit par :

$$\mathbf{A}(q) = \begin{bmatrix} ZZ_2 + XX_3\cos(\theta_3)^2 - 2XY_3\cos(\theta_3)\sin(\theta_3) & XZ_3\cos(\theta_3) - YZ_2\sin(\theta_3) \\ XZ_3\cos(\theta_3) - YZ_3\sin(\theta_3) & ZZ_3 \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} -2*\cos(\theta_3)*\mathrm{XX}_3*\sin(\theta_3) \\ +2*\cos(2\theta_3)\text{^}2*\mathrm{XY}_3 \end{matrix} & -\sin(\theta_3)*\mathrm{XZ}_3 - \cos(\theta_3)*\mathrm{YZ}_3 \\ \begin{matrix} \cos(\theta_3)*\mathrm{XX}_3*\sin(\theta_3) \\ +\cos(2\theta_3)\text{^}2*\mathrm{XY}_3 \end{matrix} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -g(MX_2\sin(\theta_2) + MY_2\cos(\theta_2)) - g\sin(\theta_2)(MX_3\sin(\theta_3) + MY_3\cos(\theta_3)) \\ -g\cos(\theta_2)(MX_3\sin(\theta_3) + MY_3\cos(\theta_3)) \end{bmatrix} \tag{23}$$

Cette méthodologie a été formalisée en vue de son implémentation dans l'outil de CAO pour le développement des modèles dynamiques des robots (Annexe A) *(Al Assad, Godoy et al. 2008).*

Enfin, il faut noter que l'écriture des équations du mouvement sous la forme matricielle ne permet pas de mettre en évidence la linéarité du modèle vis-à-vis des paramètres inertiels du robot : masse M_j, composantes des matrices d'inertie $\mathbf{J}_j$ et premier moment d'inertie $\mathbf{MS}_j$. Or, cette propriété est essentielle pour l'identification de ces derniers. En effet, nous avons vu que l'énergie cinétique ainsi que l'énergie potentielle sont linéaires vis-à-vis des paramètres inertiels du robot K_{nx10}.

Dans le cadre, de l'élaboration d'un modèle d'identification le Lagrangien pourra être écrit sous la forme suivante *(Vandanjon 1995)* :

$$\mathrm{L}(q,\dot{q}) = \mathrm{E}(q,\dot{q}) - \mathrm{U}(q) = \mathrm{Ls}(q,\dot{q}) \cdot \mathrm{K} \tag{24}$$

avec $\mathrm{K}_j = \left(\mathrm{XX}_j \;\; \mathrm{XY}_j \;\; \mathrm{XZ}_j \;\; \mathrm{YY}_j \;\; \mathrm{YZ}_j \;\; \mathrm{ZZ}_j \;\; \mathrm{MX}_j \;\; \mathrm{MY}_j \;\; \mathrm{MZ}_j \;\; \mathrm{M}_j\right)^T$

Ce qui nous donne une équation de mouvement sous la forme :

$$\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathrm{Ls}(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial \mathrm{Ls}(q,\dot{q})}{\partial q}\right) \cdot \mathbf{K} = \mathrm{Rs}(q,\dot{q},\ddot{q}) \cdot \mathbf{K} = \mathbf{\Gamma} \tag{25}$$

où $\mathrm{Rs}(q,\dot{q},\ddot{q})$ sera le régresseur du modèle d'identification.

2.2 Modélisation de la chaîne de motorisation

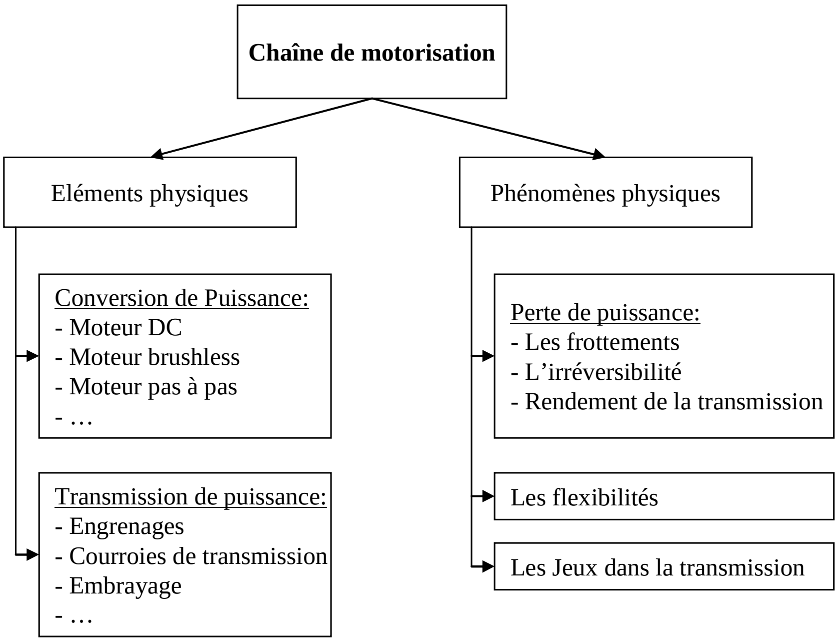


Figure 35 : Eléments de la chaîne de motorisation

Nous nous intéresserons maintenant à la modélisation de la chaîne de motorisation d'un bras de robot manipulateur. Il faut noter que cette étape fait appel à des notions très généralistes, communes à tous les systèmes électromécaniques. Dans un souci de simplicité et de pragmatisme, nous allons aborder ce problème de modélisation sous deux angles différents (Figure 35). En premier lieu, nous allons nous intéresser aux éléments physiques constituant la chaîne de motorisation, à savoir, les convertisseurs de puissance tels que les moteurs électriques; et des éléments de transmission de puissance tels que les engrenages, les courroies, les embrayages, etc. Ces éléments peuvent être modélisés d'une manière idéale en utilisant des modèles classiques dits parfaits que nous pourrons trouver facilement dans la littérature *(Henriot 1991; Allano 2000)*. En second lieu, nous allons examiner tous les phénomènes physiques, influençant le comportement dynamique de la transmission tels que les frottements, les flexibilités et les jeux de transmission. Dès lors, les phénomènes physiques liés à chaque composant de la chaîne de motorisation seront fusionnés dans un seul élément décrivant le comportement global de la chaîne de motorisation (Figure 36).

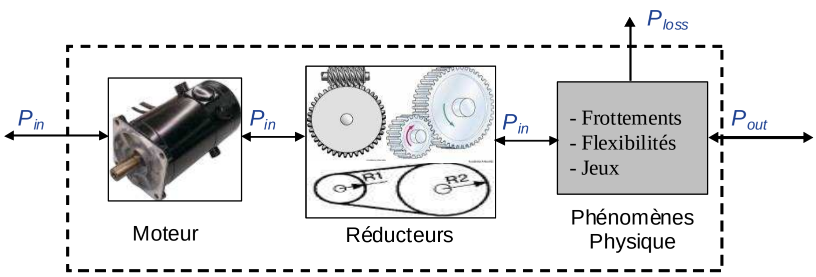


Figure 36 : Schémas blocs de la chaîne de motorisation

Dans la suite de ce mémoire, nous allons traiter le problème de modélisation des phénomènes physiques présents dans une chaîne de motorisation.

2.2.1 Les pertes de puissance

Les pertes de puissance observées dans les chaînes de motorisation sont dues principalement aux phénomènes de frottement présents au niveau des surfaces en contact entres les éléments de la chaîne de motorisation. Une modélisation appropriée des frottements est indispensable car ceux-ci sont à l'origine de divers comportements non-linéaires de la chaîne de motorisation tels que les vibrations à basse vitesse (stick-slip), les retards ou encore l'irréversibilité.

Les modèles du phénomène de frottement utilisés couramment peuvent être répertoriés suivant deux familles : les modèles statiques et les modèles dynamiques *(Borsotto, Beauvois et al. 2006).* En pratique et particulièrement en robotique, seuls les modèles statiques sont utilisés du fait de la simplicité de leur expression, et de la qualité convenable de l'approximation du frottement pour les vitesses de glissement relativement élevées. Parmi les modèles statiques, nous pouvons citer :

- Modèle SCV : modèle statique + Coulomb + visqueux

Ce modèle est élaboré à partir de trois éléments du frottement :

- le frottement statique, le couple nécessaire pour amorcer le mouvement en partant d'une vitesse de glissement nulle ;
- le frottement de Coulomb (ou sec), un couple de frottement constant en opposition au mouvement ;
- le frottement visqueux qui dépend de la vitesse du mouvement (Figure 37). Ce modèle a comme expression mathématique :

$$\Gamma_f(\Gamma_i, v) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(v) \cdot F_c + \sigma_v \cdot v & si\ v \neq 0 \\ \mathrm{sgn}(F_s) \cdot \min(|\Gamma_i|, F_s) & si\ v = 0 \end{cases} \quad (26)$$

avec :

F_s : couple de frottement statique (au démarrage)

F_c : couple de frottement de Coulomb (frottement sec)

σ_v : coefficient de frottement visqueux

v : vitesse du mouvement

Il faut noter que ce modèle pose des difficultés en simulation en raison du problème de passage en $v = 0$. C'est pourquoi, il est préférable définir un seuil autour de 0 pour garantir la convergence de la simulation. Le modèle devient ainsi :

$$\Gamma_f(\Gamma_i, v) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(v) \cdot F_c + \sigma_v \cdot v & si\ v \notin [-dv, dv] \\ \mathrm{sgn}(F_s) \cdot \min(|\Gamma_i|, F_s) & si\ v \in [-dv, dv] \end{cases} \quad (27)$$

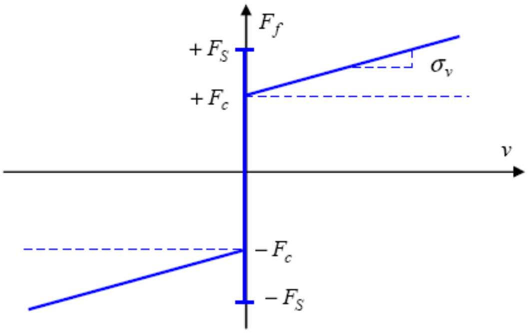


Figure 37 : Modèle SCV

- Modèle de Stribeck

Un des problèmes soulevés par le modèle SCV est la discontinuité du couple de frottement une fois le mouvement amorcé. Stribeck a mis en évidence un modèle plus proche de la réalité qui permet tenir compte de la phase transitoire (Figure 38). Ce modèle est décrit par la relation suivante :

$$\Gamma_f(\Gamma_i, v) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(v) \cdot \left(F_c + (F_s - F_c) \cdot e^{-\left|\frac{v}{v_s}\right|^{\delta_s}} \right) + \sigma_v \cdot v & si\ v \notin [-dv, dv] \\ \operatorname{sgn}(F_s) \cdot \min(|\Gamma_i|, F_s) & si\ v \in [-dv, dv] \end{cases} \qquad (28)$$

avec :

v_s : vitesse de Stribeck, permet de régler la décroissance de Fs vers Fc.

δ_s : paramètre adimensionnel permettant de maîtriser le comportement du frottement au voisinage de $v=0$, le plus souvent il est choisi égal à 2.

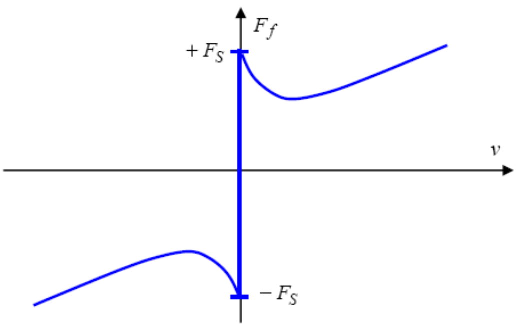


Figure 38 : Modèle de Stribeck

2.2.2 L'irréversibilité de la chaîne de motorisation

L'irréversibilité est un comportement particulier de certaines transmissions mécaniques telles que les roues vis-sans-fin et les vis-écrous. Elle est caractérisée par le fait que le transfert de puissance n'est autorisé que dans un seul sens, typiquement du moteur vers la charge. Autrement dit, la charge ne peut pas entrainer le mouvement du bras de robot sous l'effet de la gravité ou bien son énergie cinétique. En soit, cette propriété est intéressante pour des raisons de sécurité, par exemple pour bloquer le mouvement du bras du robot en cas de défaillance électrique.

Bien que l'utilisation de ce type de mécanisme de sécurité diminue grâce à l'amélioration constante des mécanismes de freinage, il reste présent sur un grand nombre de robots médicaux où les exigences de sécurité passive sont strictes. Dans le cadre de ce travail de thèse, nous allons nous intéresser à la modélisation de ce phénomène présent sur les axes de motorisation du robot Innova.

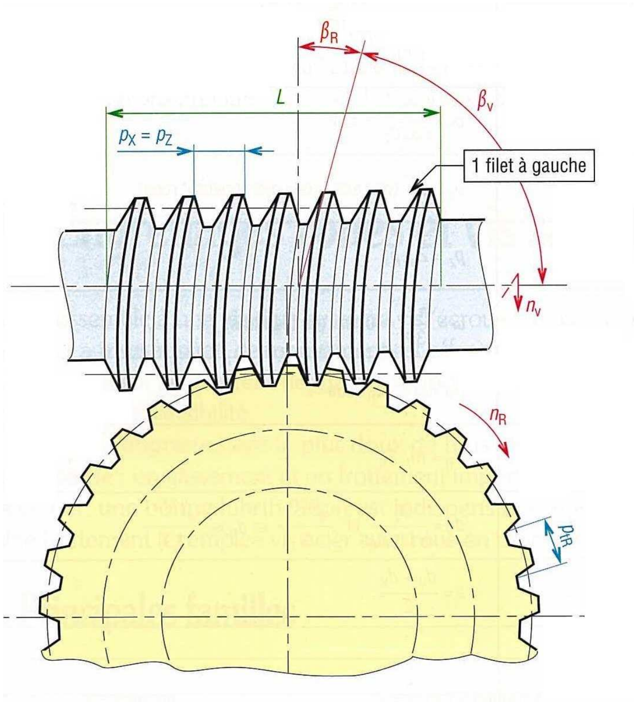


Figure 39 : Système roue et vis sans fin

Physiquement, l'irréversibilité est liée au phénomène de frottement statique existant au niveau des surfaces en contact entre les éléments du réducteur (Figure 39, Figure 40). La condition géométrique d'irréversibilité dépend : des angles d'inclinaison d'hélice de la roue, de l'angle de pression de la denture normale α et du coefficient de frottement f des matériaux en contact. L'irréversibilité « statique » est assurée si la condition suivante portant sur l'angle d'hélice est vérifiée :

$$\tan\beta < \frac{f}{\cos\alpha}$$

En pratique, le coefficient de frottement f est faible (0,1 à 0,2 suivant la lubrification pour un contact acier/acier), aussi l'irréversibilité est obtenue lorsque l'angle d'inclinaison de l'hélice devient suffisamment petit, typiquement inférieur à 10° (*Fanchon 2004*).

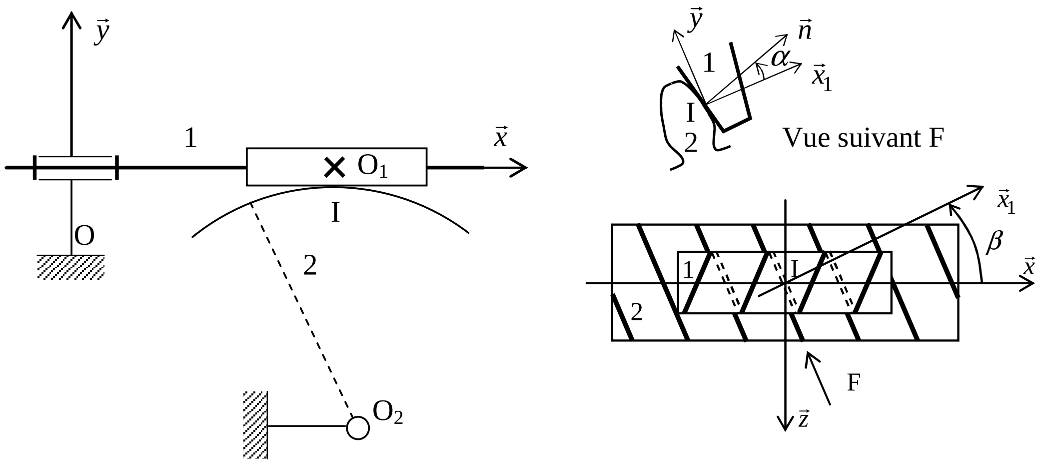


Figure 40 : Système roue et vis sans fin

Les modèles de frottement présentés précédemment ne permettent pas de simuler correctement la composante du couple de frottement dû à l'irréversibilité. Pour illustrer cette propriété, nous allons comparer le couple moteur obtenu en simulation d'une transmission réversible (mais en intégrant un modèle de frottement) avec le couple moteur **mesuré** sur l'axe Pivot du robot Innova. Nous réalisons un mouvement de rotation, d'une amplitude de 200°, à vitesse constante $+7°/s$ (Figure 41) et $-7°/s$ (Figure 42). La mesure du couple moteur est estimée à partir de la mesure du courant et des constantes caractéristiques du moteur.

Les résultats de l'expérience montrent clairement que la seule mise en place d'un modèle de frottement n'est pas suffisante pour caractériser le comportement de l'axe quand la charge est menante, c'est-à-dire quand le transfert de puissance se fait de la charge vers le moteur. La figure 41 et la figure 42 mettent en évidence sur les phases où la charge est menante :

- $\theta \in [60°\,;100°]$ lorsque $\dot{\theta} > 0$
- $\theta \in [-100°\,;60°]$ lorsque $\dot{\theta} < 0$

Sur ces phases, la puissance motrice reste positive $C_m\dot{\theta} > 0$. Dans le cas d'une transmission réversible, comme illustré par le résultat de la simulation, le $C_m\dot{\theta}$ serait négatif sur des phases de récupération. Ainsi, lorsque la charge est menante, la puissance motrice $C_m\dot{\theta} > 0$ reste nécessaire afin de compenser les frottements dans la transmission et dans les différentes liaisons.

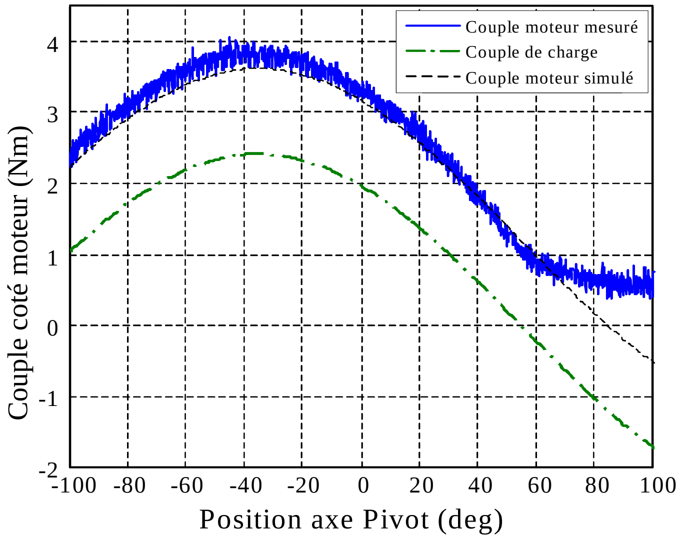


Figure 41 : Variation du couple moteur, vitesse de rotation pivot 7 °/s

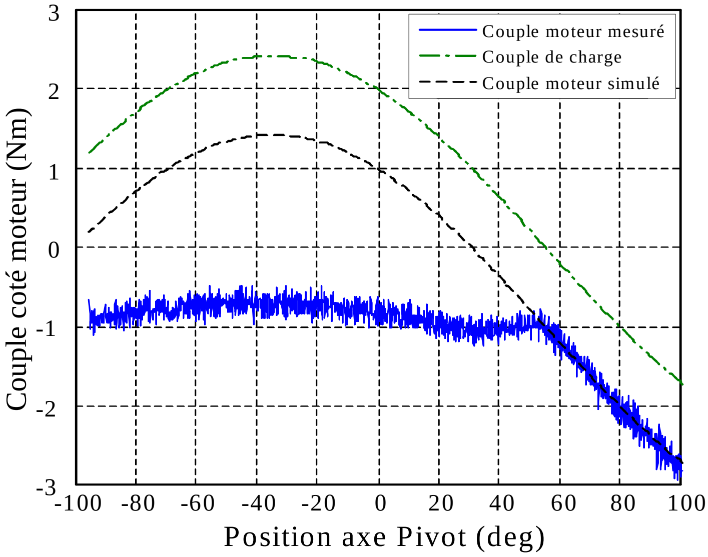


Figure 42 : Variation du couple moteur, vitesse de rotation pivot -7 °/s

Dans une telle configuration il est alors possible d'interpréter le phénomène d'irréversibilité comme un couple complémentaire au niveau du réducteur compensant le couple de charge (dû à la gravité dans ce cas). Ainsi, le comportement de la transmission, dans une configuration irréversible, peut alors être modélisé par un couple additionnel exprimé au niveau du réducteur. En conséquence, pour tenir compte de l'irréversibilité nous proposons d'enrichir le modèle de frottement en intégrant un nouveau couple « virtuel » qui dépend de la puissance transmise, c'est-à-dire : du couple de charge, du couple moteur et de la vitesse. Le modèle de frottement devient ainsi :

$$\Gamma_f = \Gamma_f(\Gamma_m, v) + \Gamma_{fT}(\Gamma_m, \Gamma_l, v) \tag{29}$$

avec:

$\Gamma_f(\Gamma_m, v)$: modèle du couple de frottement, ex. SCV

$\Gamma_{fT}(\Gamma_m, \Gamma_l, v)$: modèle de frottement additionnel, tenant compte du couple moteur Γ_m et du couple de charge Γ_l, caractérisant le phénomène d'irréversibilité.

Deux approches peuvent être envisagées pour l'élaboration du modèle de $\Gamma_{fT}(\Gamma_m, \Gamma_l, v)$:

- D'un point de vue microscopique, une première approche est de modéliser les forces de frottement au niveau du contact entre les éléments du réducteur et déterminer les pertes de puissance en fonction des paramètres géométriques du réducteur. Cette approche bien que rigoureuse, est assez difficile à mettre en œuvre car elle conduit d'une manière générale à des modèles très complexes et difficilement identifiables (*Henriot 1991*).

- D'un point de vue macroscopique, nous pourrons utiliser la notion de rendement de transmission pour interpréter ce phénomène *(Abba and Chaillet 1999; Abba and Sardain 2003)*. L'étude comparative menée au sujet de ces deux approches a démontré que l'approche macroscopique et plus adaptée pour répondre aux problématiques industrielles, principalement en raison de la simplicité de l'identification du modèle *(Al Assad, Godoy et al. 2007)*.

Ainsi, nous proposons dans la suite d'étudier, un modèle macroscopique que nous définissons sous la forme :

$$\Gamma_{fT}(\Gamma_m, \Gamma_l, v) = \mu_m(\Gamma_m, \Gamma_l, v) \cdot \Gamma_m + \mu_l(\Gamma_m, \Gamma_l, v) \cdot \Gamma_l \tag{30}$$

où $\mu_{mi}(\Gamma_{mi}, \Gamma_{li}, \dot{q}_{mi})$ et $\mu_{li}(\Gamma_{mi}, \Gamma_{li}, \dot{q}_{mi})$ représentent des coefficients dynamiques de frottement.

Reprenons l'équation (18) du mouvement du robot. En y ajoutant l'inertie de la chaîne de transmission, il vient :

$$\Gamma_m = J_m \cdot \ddot{q}_m + N^{-1}\mathrm{A}(q) \cdot \ddot{q} + \Gamma_l + \Gamma_f \tag{31}$$

où $\Gamma_l = N^{-1}(\mathrm{C}(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + \mathrm{Q}(q))$ est le couple de charge et J_m la matrice des inerties des chaînes de motorisation.

En substituant (29) dans l'équation du mouvement, nous obtenons :

$$\Gamma_m = (J_m + N^{-2}\mathrm{A}(q)) \cdot \ddot{q}_m + \Gamma_l + \Gamma_f + \mu_m \cdot \Gamma_m + \mu_l \cdot \Gamma_l \tag{32}$$

où μ_m et μ_l sont des matrices diagonales définies telles que :

- $\mu_m = \mathrm{diag}\{\mu_{mi}(\Gamma_{mi}, \Gamma_{li}, \dot{q}_{mi}) \,;\, i = 1, \ldots, n\}$
- $\mu_l = \mathrm{diag}\{\mu_{li}(\Gamma_{mi}, \Gamma_{li}, \dot{q}_{mi}) \,;\, i = 1, \ldots, n\}$

En regroupant les termes de l'équation précédente, nous obtenons :

$$\eta_m \cdot \Gamma_m = (J_m + N^{-2}\mathrm{A}(q)) \cdot \ddot{q}_m + \eta_l \cdot \Gamma_l + \Gamma_f(\Gamma_m, \dot{q}_m) \tag{33}$$

avec :

- $\eta_m = (I_{n\times n} - \mu_m)$: coefficient de « rendement moteur », c'est-à-dire du transfert de puissance moteur vers charge.
- $\eta_l = (I_{n\times n} + \mu_l)$: coefficient de « rendement charge », c'est-à-dire du transfert de puissance charge vers moteur.

Les coefficients de rendement varient entre 0 et 1, et sont définis tels que :

$$\eta = \frac{|P_{\text{sortie}}|}{|P_{\text{entrée}}|} \tag{34}$$

Les coefficients de rendement ainsi définis dans l'équation (33) permettent de quantifier le rendement de la chaîne de motorisation dans les deux directions de transfert de puissance. Dès lors, une chaîne de motorisation complètement irréversible aura $\eta_l = 0$. Toutefois, l'irréversibilité des transmissions, en particulier en régime dynamique, n'est pas parfaite. Le coefficient de rendement η_l, lorsque la charge est motrice, pourra alors avoir une valeur faible mais non nulle.

L'affectation effective des coefficients de rendement peut se faire en utilisant une machine à états. L'état est défini en fonction du couple moteur Γ_m, du couple de charge Γ_l ainsi que de la vitesse $\dot{q}$ (Tableau 4).

Entrées	**Sorties**
Γ_m : Couple moteur (Tm) Γ_l : Couple charge (Tl) $\dot{q}$: Vitesse	η_m : Rendement moteur η_l : Rendement charge

Tableau 4 : Paramètres de la machine d'états

Plusieurs approches d'implémentation peuvent être envisagées. Nous allons présenter une implémentation utilisant l'outil « Stateflow » de Matlab *(Al Assad, Godoy et al. 2008)*. La machine d'états est caractérisée par deux couches hiérarchiques. Une couche supérieure qui permet de déterminer la nature du mouvement de la machine (Figure 43) suivant trois états possibles :

– Arrêt « Stop » : $\dot{q} = 0$

– Mouvement direct « Direct_Motion » : rotation dans le sens positif $\dot{q} > 0$

– Mouvement inverse « Reverse_Motion » : rotation dans le sens négatif $\dot{q} < 0$

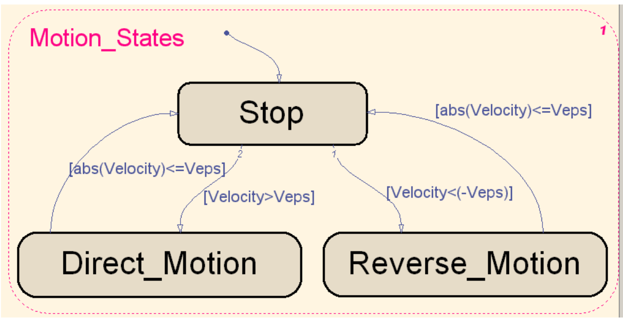


Figure 43 : Couche haut niveau: Nature du mouvement

A chaque état de la couche supérieure, il est associé une nouvelle machine d'états qui permet de déterminer le sens de transfert de puissance et en conséquence d'affecter les coefficients de rendement (Figure 44, Figure 45).

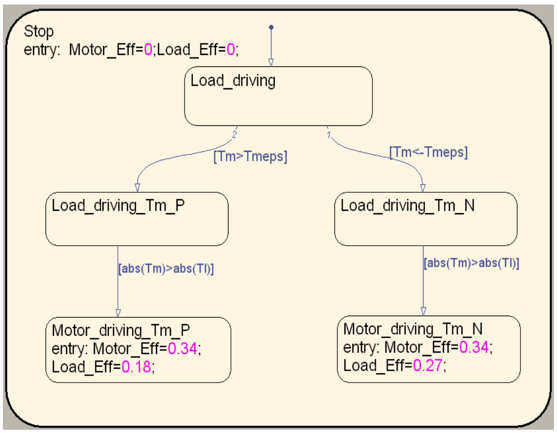


Figure 44 : Couche bas niveau, état "Stop"

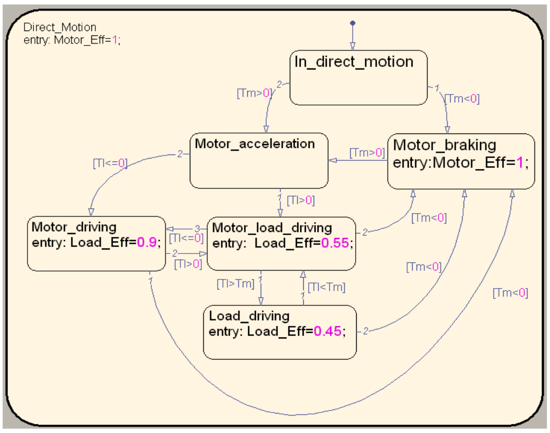


Figure 45 : Couche bas niveau, état "Direct motion"

Les coefficients de rendement ont été identifiés pour chaque état fonctionnel du système à partir des réponses expérimentales. A titre d'exemple, la figure 46 montre la sollicitation en boucle ouverte à une loi d'évolution de la tension aux bornes du moteur sur l'axe du Pivot. Nous pouvons distinguer sur les enregistrements de la figure 46-a les quatre états de l'axe Pivot :

– Etat à l'arrêt 4,2 à 5,2 sec
– Etat en mouvement inverse, charge menante 5,2 s à 10 s
– Etat en mouvement inverse, charge menée 10 s à 19,3 s
– Etat en mouvement inverse, freinage 19,3 s à 19,4 s

L'identification des coefficients de rendement, correspondant à chaque état, a été effectuée en minimisant la fonction de coût V définie par la relation (35). Le critère utilisé fait intervenir les couples : moteur, dynamique et de charge.

$$V(\eta_m,\eta_l)=\sum\left(K_c\cdot I_{mes}-\frac{1}{\eta_m}[J_m+N^{-2}\mathrm{A}(q))\cdot\ddot{q}_m+\Gamma_f(\Gamma_m,\dot{q}_m)]+\frac{\eta_l}{\eta_m}\cdot\Gamma_l\right)^2 \qquad (35)$$

Il faut noter que les valeurs de rendements obtenues sont peu différentes entre les mouvements direct et inverse. L'impact de l'écart est très faible sur les résultats de simulation, aussi nous avons préféré utiliser la moyenne des rendements afin réduire la complexité du modèle.

La validité des modèles obtenus a été effectuée à partir de réponses expérimentales. Ainsi, la figure 46 montre les évolutions temporelles et expérimentales obtenues en simulation de l'axe Pivot pour une réponse en boucle ouverte à un profil de tension aux bornes du moteur. La figure 47 montre les évolutions temporelles en boucle fermée obtenues expérimentalement et en simulation du Carc pour des consignes de $\pm 10\,\mathrm{deg/s}$. Les essais effectués montrent d'une part la bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus en simulation, d'autre part les effets du phénomène d'irréversibilité. Ce phénomène se traduit, par exemple, par la dissymétrie du courant à la montée et à la descente pour une même vitesse de déplacement (Figure 47).

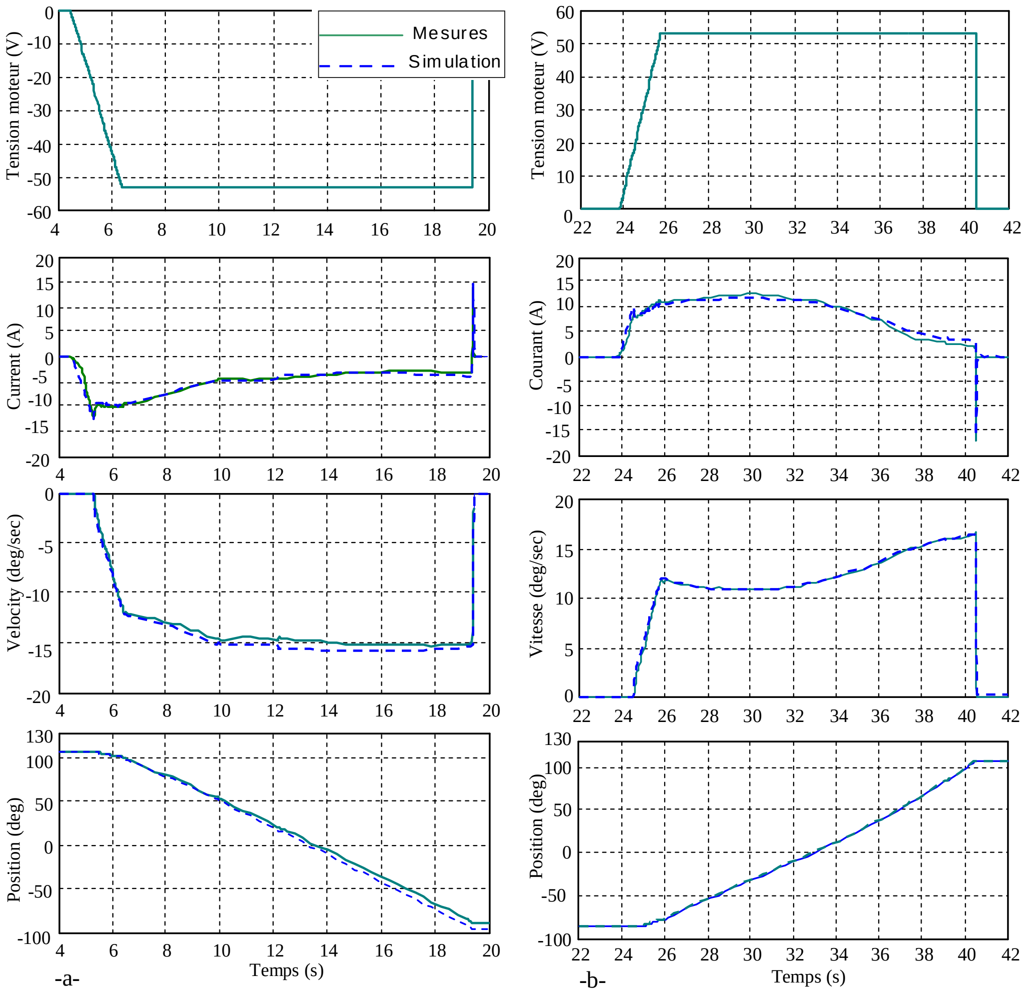


Figure 46: Validation expérimentale, réponse en boucle ouverte de l'axe pivot du robot Innova

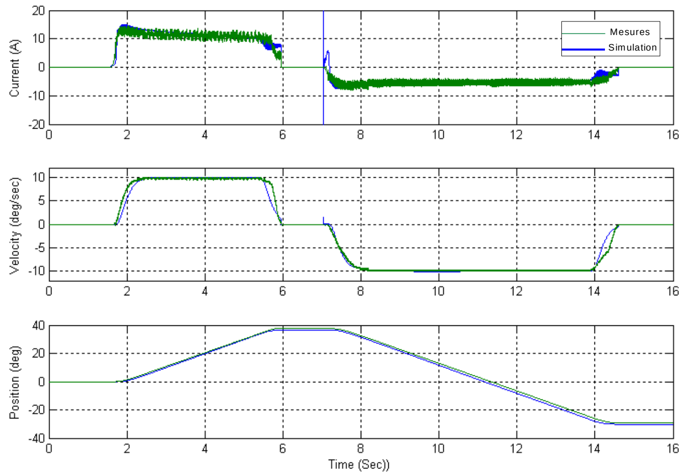


Figure 47: Validation expérimentale, réponse en boucle fermée de l'axe Carc

En somme, ces résultats nous montrent clairement que la prise en compte du phénomène d'irréversibilité est indispensable afin d'améliorer l'estimation des couples mis en jeu lors du mouvement du robot. Ces modèles serviront dans la suite dans les approches de commande utilisant une anticipation avec couple précalculé (Chapitre III-4)

2.2.3 Les jeux de la transmission

Les jeux de transmission sont des phénomènes non-linéaires présents dans les chaînes de transmission de puissance comportant des composants mécaniques disjoints (Figure 48) tels que les engrenages, les roue et vis sans fin, les crémaillères, etc. Les jeux sont dus principalement aux imperfections d'usinage et peuvent s'accentuer avec l'usure du système créant ainsi un écart de position important entre l'entrée et la sortie du réducteur. Le remède à ce problème est tout d'abord mécanique. Il n'empêche que lorsqu'il est présent, il doit être pris en compte dans la modélisation de la chaîne de transmission et la conception des lois de commande car il peut être la source d'oscillations gênantes voire de l'instabilité du système.

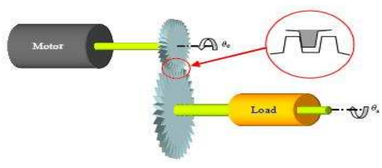


Figure 48: Jeux de transmission

Plusieurs travaux de recherche ont proposé des modèles de jeux de transmission *(Nordin et Gutmanb 2002).* Nous pouvons rappeler les deux principaux :

– ***Modèle à zone morte***

$$\Gamma_{\text{sortie}} = \begin{cases} \Gamma_{\text{entrée}} \text{ si } |\Delta\theta| > \alpha \\ 0 \quad \text{si } |\Delta\theta| < \alpha \end{cases} \tag{36}$$

avec α l'angle maximal du jeu, Δθ l'écart de position entre l'entrée et la sortie.

– ***Modèle à hystérésis***

$$\dot{\theta}_{\text{sortie}} = \begin{cases} \dot{\theta}_{\text{entrée}} \text{ si } \dot{\theta}_{\text{entrée}} > 0 \text{ et } \Delta\theta = -\alpha \\ \dot{\theta}_{\text{entrée}} \text{ si } \dot{\theta}_{\text{entrée}} < 0 \text{ et } \Delta\theta = \alpha \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases} \quad (37)$$

2.3 Outils de modélisation

Les différents éléments de modélisation présentés précédemment ont permis d'aboutir à une procédure systématique permettant d'élaborer des modèles de robots manipulateurs. Il existe des outils logiciels pour l'aide à la génération de modèles de robots tel que « Symoro+ »[1], toutefois, ces outils n'incorporent pas la chaîne de motorisation dans le modèle généré. En particulier, la prise en compte de l'irréversibilité de la chaîne de transmission.

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons développé un outil logiciel, sous l'environnement Matlab, destiné à générer automatiquement des modèles de robots manipulateurs comprenant à la fois le modèle dynamique ainsi que la chaîne de motorisation. Cet outil est fondé sur un assistant visuel qui permet de recueillir les paramètres du robot et ensuite de générer le modèle Simulink associé *(Al Assad, Godoy et al. 2008)*. La figure 49 montre l'architec-ture logicielle « RobMod ».

L'organisation, utilisation et l'interface de cet outil est décrite en annexe A.

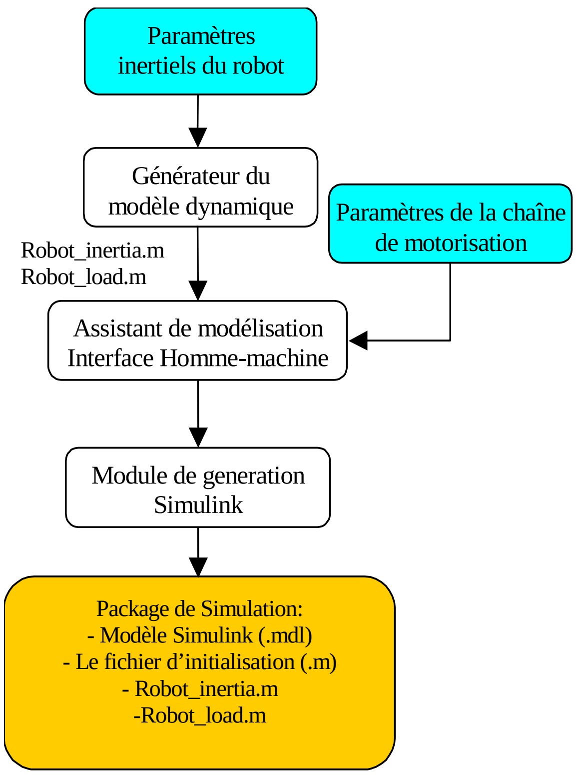


Figure 49 : Architecture du logiciel RobMod

[1] "**SY**mbolic **MO**deling of **RO**bots ", développé par le laboratoire IRCCyN à Nantes

3 Modèle souple

3.1 Modélisation des modes de vibrations

L'élasticité est une caractéristique présente dans de nombreuses structures mécaniques. Elle dépend principalement de deux facteurs, à savoir la nature des matériaux de la structure ainsi que sa forme géométrique. Ces élasticités contribuent énormément à l'apparition de vibrations lors du fonctionnement du robot. Toutefois, il faut noter que les vibrations peuvent encore trouver leurs origines dans d'autres phénomènes tels que les frottements à basse vitesse de type « stick-slip » ou parfois la raideur liée à la boucle d'asservissement.

Les exigences accrues en termes de rapidité et de précision dynamique rendent alors indispensable la prise en compte des élasticités du robot lors de la conception de la loi de commande. Les lois de commande ignorant ces phénomènes d'élasticité peuvent provoquer des oscillations du robot voire son instabilité. Dans cette optique, le modèle rigide décrit dans la section II.2 devient insuffisant pour caractériser le comportement du robot dans un large domaine de fonctionnement et pour des bandes passantes élevées. Dès lors, il est nécessaire d'enrichir le modèle rigide en y intégrant une modélisation des élasticités du système.

En analysant les modes de vibrations dans un robot, nous constatons que ces derniers sont de deux natures :

- Des vibrations en basse fréquence provenant de la structure du robot.
- Des vibrations en haute fréquence provenant de la chaîne de motorisation.

En général, les modes de vibrations les plus gênants sont les modes de structures car elles sont souvent mal connues, difficilement mesurables et dont les paramètres caractéristiques sont incertains. De nombreux travaux de recherche *(Book 1989)*, notamment en robotique spatiale, proposent des solutions destinées à amortir ou à limiter les effets de ces modes de vibrations. Bien que ces solutions conduisent théoriquement à de bons résultats, elles restent encore très difficiles à déployer sur des robots dans le cadre de projets de R&D industriels. En effet, ces solutions supposent une modélisation très précise des structures mécaniques des robots, et font appel à des approches de modélisation lourdes telles que la modélisation par éléments finis.

De plus, les lois de commande synthétisées sont quelquefois limitées en termes de performances dynamiques ou nécessitent encore un volume de calculs importants qui sont difficilement réalisables sur des contrôleurs simples n'offrant que peu de possibilités de calcul telles que l'utilisation de la virgule flottante. Cependant pour des robots très souples tels que les robots spatiaux et d'une manière plus générale pour des structures « très souples », ces solutions restent intéressantes car la nature de ces robots n'impose que des mouvements de faible dynamique *(Book 1989)*.

Dans le cadre d'un robot industriel qui n'est pas très souple mais ne peut pas être considéré comme rigide, les solutions évoquées précédemment peuvent se révéler décevantes compte tenu des exigences dynamique requises. Dans le cadre de ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à ce type de problématique en introduisant les flexibilités structurelles dans le modèle rigide du robot. Bien que réparties géométriquement, les principales flexibilités peuvent être modélisées localement en les ramenant dans des points particuliers de la structure. L'affectation de ces points peut être abordée, d'une part, par l'analyse du comportement vibratoire du système en utilisant des modèles à éléments finis, d'autre part empiriquement par l'observation du comportement en mouvement du robot.

Dès lors, la modélisation de ces flexibilités a été paramétrée de manière à reproduire les modes de vibration les plus gênants. Le but de cette approche est d'aboutir à des modèles qui se prêtent bien à l'analyse et la conception des lois de commande.

3.1.1 Flexibilités de la chaîne de motorisation

Dans un premier temps, les principaux travaux de modélisation de flexibilités liées à la chaîne de motorisation seront présentés, ainsi que leur application sur le robot Innova. En effet, l'approche utilisée en robotique pour modéliser les flexibilités articulaires (*Khalil et Dombre 1999*) consiste à introduire un ressort de raideur linéaire ainsi qu'un amortisseur afin de reproduire le mode de vibration de l'axe (Figure 50). Cette modélisation traduit les déformations des éléments de la chaîne de transmission, par exemple les courroies, ainsi que la déformation des surfaces de contacts entre les composants tels que les réducteurs (engrenages, harmonic drives, etc…). Par ailleurs, il est parfois envisageable de modéliser une flexibilité structurelle de la même manière quand celle-ci est dans l'axe de mouvement.

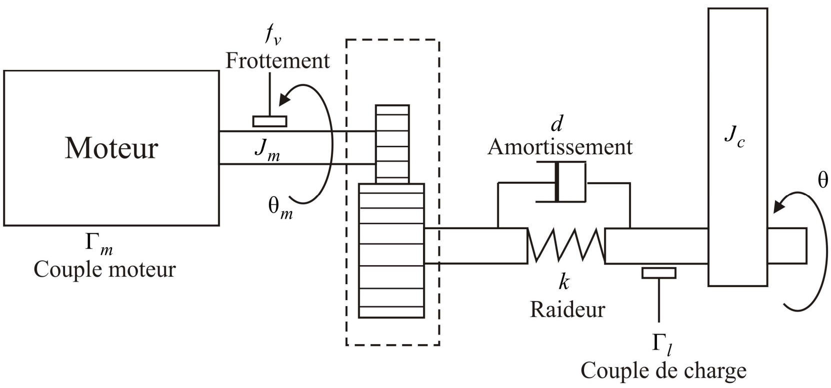


Figure 50: Flexibilité articulaire

Les équations dynamiques de l'articulation flexible sont dérivées facilement du principe fondamental de la dynamique :

$$J_m \cdot \ddot{\theta}_m + f_v \cdot \dot{\theta}_m + k \cdot (\theta_m - \theta) = \Gamma_m \tag{38}$$

$$J_c \cdot \ddot{\theta} + d \cdot \dot{\theta} + \Gamma_l(\theta) = k \cdot (\theta_m - \theta) \tag{39}$$

avec J_m inertie du moteur ; f_v coefficient de frottement visqueux ; k la raideur ; J_{PVT} inertie de la charge ; d coefficient d'amortissement ; Γ_l couple de charge et Γ_m couple moteur.

Il faut noter que les variables ainsi que les paramètres doivent être exprimés dans le même référentiel, i.e. coté charge ou bien coté moteur, auquel cas le rapport de réduction est omis des équations dynamiques. Par ailleurs, il est important de remarquer que l'ajout de flexibilités articulaires dans le modèle double le nombre des variables d'état du système.

Dans le cadre d'un robot multiaxes, les équations peuvent être généralisées et il vient :

$$\mathbf{J}_m \cdot \ddot{q}_m + \mathbf{F}_v \cdot \dot{q}_m + \mathbf{K} \cdot (q_m - q) = \mathbf{\Gamma}_m \tag{40}$$

$$\mathbf{A}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + \mathbf{Q}(q) + \mathbf{D} \cdot \dot{q} = \mathbf{K} \cdot (q_m - q) \tag{41}$$

Dans (40) les matrices $\mathbf{J}_m$, $\mathbf{F}_v$ et $\mathbf{K}$ sont diagonales regroupant les paramètres caractéristiques des chaînes de motorisation de chaque axe : moment d'inertie de l'axe moteur, frottement visqueux et raideur.

Ces équations ne tiennent pas compte de la dynamique électrique des moteurs. En effet, compte tenu de la rapidité des boucles de courant par rapport aux dynamiques d'asservissement de la vitesse et de la position, il est souvent préférable d'asservir le couple i.e. le courant uniquement en se fondant sur des modèles obtenus à partir des caractéristiques électriques du moteur. En supposant que le courant dans le moteur est correctement asservi à sa valeur de consigne, on pourra utiliser dans le modèle mécanique la relation :

$$\Gamma_m = K_t \cdot I_m \approx K_t \cdot I_c \tag{42}$$

où K_t est la constante de couple du moteur, I_m le courant du moteur et I_c le courant de consigne.

Plusieurs méthodes de conception de la boucle de courant peuvent être envisagées, le lecteur pourra se référer à (*Flaus 1994*; *Godoy 2007*) pour plus de détails sur ce sujet.

3.1.1.1 Modélisation de l'axe Pivot du robot Innova

Dans le cadre de l'étude des méthodologies de commande et de réduction de vibrations en mode monoaxe, nous allons développer le modèle de l'axe Pivot du robot Innova (Figure 51). Cette modélisation a pour but de reproduire le comportement vibratoire de l'axe et en particulier le premier mode de vibration en basse fréquence à 4,67 Hz qui se trouve dans la plage de fonctionnement du système. L'identification de ce mode a été faite à partir de l'enregistrement

(Figure 52) des mesures d'accélération effectuées au niveau du tube suite à une excitation du Pivot.

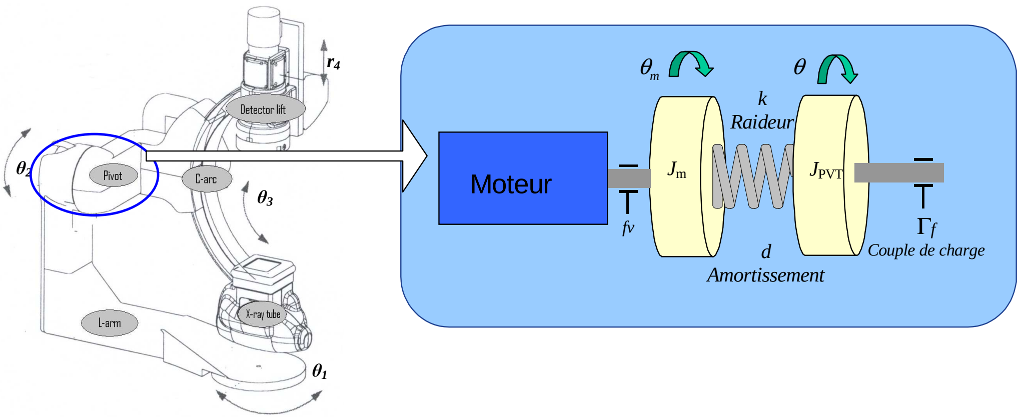


Figure 51 : Axe Pivot, modèle de la flexibilité articulaire

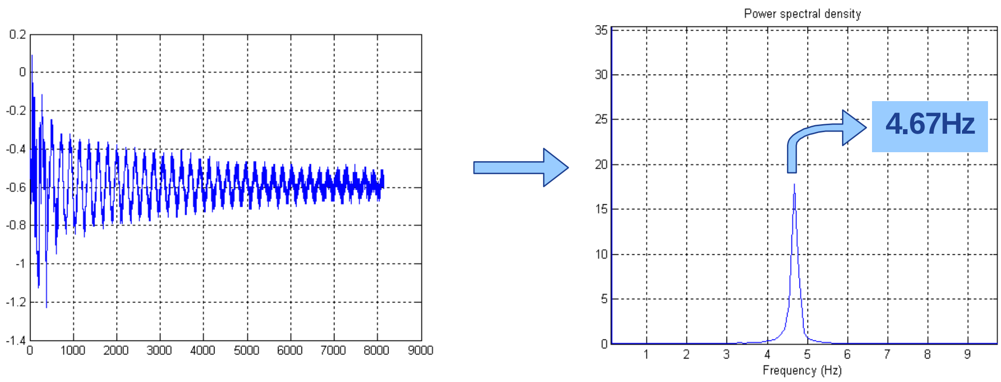


Figure 52: Identification de la fréquence de vibration du Pivot ; gauche : mesure d'accéléromètre des vibrations à l'arrêt, droite : analyses du spectre de fréquence

Cet enregistrement permet, par ailleurs, de vérifier qu'en raison de l'excitation de ce mode, le comportement du robot peut être dégradé, impactant en conséquence la qualité des prises d'images.

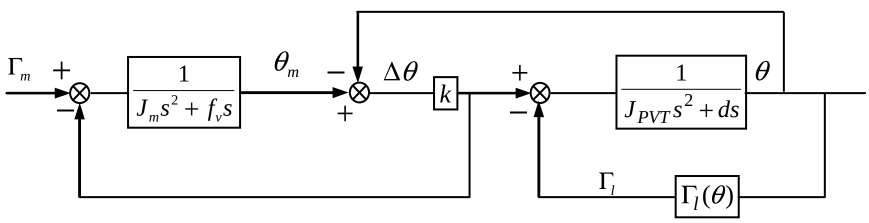


Figure 53 : Synoptique du système monoaxe

Les équations (38) et (39) décrivent le comportement dynamique du système. Afin de faciliter son analyse du point de vue de l'Automatique, il convient d'écrire les fonctions de transfert caractérisant l'ensemble du système. Le schéma bloc de la chaîne d'asservissement de l'axe Pivot, en supposant les autres axes bloqués, est donné sur la figure 53. Il faut néanmoins préciser que pour des raisons pratiques d'implémentation de capteurs, la seule mesure disponible est côté moteur. Cette mesure peut ne traduire que partiellement le niveau de vibrations au niveau du tube. En particulier, en présence d'une transmission irréversible.

Le couple de charge $\Gamma_l(\theta)$ qui correspond à $Q_i(q)$ le couple de l'axe Pivot (23) correspond à la forme classique du couple d'un pendule :

$$\Gamma_l(\theta) = \Gamma_{l0} \cdot \cos(\theta - \phi)$$

où Γ_{l0} est le premier moment d'inertie et ϕ l'angle formé par l'axe reliant le centre de rotation et le centre de gravité, comparativement à l'axe mobile de référence lié au pivot. Ces deux termes, Γ_{l0} et ϕ, dépendent de la position du Carc (θ_3) et de l'ascenseur (r_4).

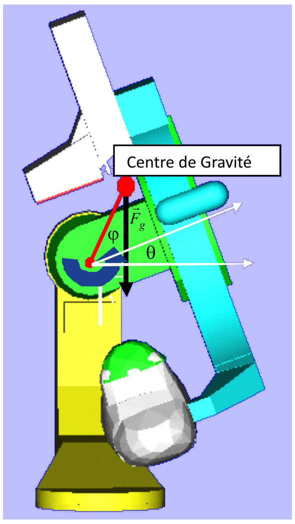


Figure 54 : Angles caractéristique de l'axe du Pivot

Dans la suite, nous définissions les variables d'état du modèle tels que :

$$X = \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{\theta}_m & \theta & \theta_m \end{bmatrix}^T$$

Notons que pour le problème d'asservissement de la vitesse dans le cas d'une commande manuelle via Joystick, le modèle pourra être réduit en considérant uniquement l'écart angulaire $\Delta\theta = \theta - \theta_m$, auquel cas le vecteur des variables d'état sera :

$$X = \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{\theta}_m & \Delta\theta \end{bmatrix}^T$$

Dans la suite de cette partie, le modèle du Pivot sera représenté par le système non-linéaire suivant :

$$\dot{X} = f(X, \Gamma_m) = \begin{cases} -\dfrac{d}{J_{PVT}}\dot{\theta} + \dfrac{k}{J_{PVT}}\Delta\theta - \dfrac{\Gamma_{l0}}{J_{PVT}} \cdot \sin(\theta - \phi) \\ -\dfrac{f_v}{J_m}\dot{\theta}_m - \dfrac{k}{J_m}\Delta\theta + \Gamma_m \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_m \end{cases} \tag{43}$$

Les valeurs numériques des différents paramètres du modèle de commande, exprimées côté charge, sont données dans le tableau 5.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
J_m	$187\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$	f_v	3,69 Nm/(rad/s)
J_{PVT}	$101\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$	Γ_{l0}	1349 Nm
k	$8{,}70\cdot10^4$ Nm/rad	ϕ	0,96 rad
d	119 Nm/(rad/s)	N	558

Tableau 5: Paramètres de l'axe Pivot, robot Innova frontal

Comme le comportement vibratoire se manifeste principalement dans des phases spécifiques du mouvement, essentiellement au démarrage et à l'arrêt, l'utilisation d'un modèle linéarisé représente un intérêt particulier notamment pour la synthèse de la loi de commande. En linéarisant le modèle autour d'une position angulaire θ_0, nous obtenons :

$$\delta\dot{X} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{J_{PVT}} & 0 & -\frac{k}{J_{PVT}} - \frac{\Gamma_{l0}\cdot\sin(\theta_0-\varphi)}{J_{PVT}} & \frac{k}{J_{PVT}} \\ 0 & -\frac{f_v}{J_m} & \frac{k}{J_m} & -\frac{k}{J_m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \delta X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \delta\Gamma_m \tag{44}$$

Les valeurs numériques des robots développés par General Electric Healthcare conduisent à une raideur telle que $k >> \Gamma_{l0}$. En conséquence, le modèle pourra être simplifié suivant la représentation :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{d}{J_{PVT}} & 0 & -\frac{k}{J_{PVT}} & \frac{k}{J_{PVT}} \\ 0 & -\frac{f_v}{J_m} & \frac{k}{J_m} & -\frac{k}{J_m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Ainsi les principales fonctions de transfert du système sont :

$$\frac{\dot{\theta}(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{\frac{\omega_o^2\omega_m^2}{k}s}{\omega_o^2\omega_m^2 - (s^2+2\xi_o\omega_o\cdot s+\omega_o^2)(s^2+2\xi_m\omega_m\cdot s+\omega_m^2)} \tag{46}$$

$$\frac{\dot{\theta}_m(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{\frac{\omega_m^2}{k}(s^2+2\xi_o\omega_o\cdot s+\omega_o^2)s}{\omega_o^2\omega_m^2 - (s^2+2\xi_o\omega_o\cdot s+\omega_o^2)(s^2+2\xi_m\omega_m\cdot s+\omega_m^2)} \tag{47}$$

$$\frac{\theta(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{\frac{\omega_o^2\omega_m^2}{k}}{\omega_o^2\omega_m^2 - (s^2+2\xi_o\omega_o\cdot s+\omega_o^2)(s^2+2\xi_m\omega_m\cdot s+\omega_m^2)} \tag{48}$$

$$\frac{\theta_m(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{\frac{\omega_m^2}{k}(s^2 + 2\xi_o\omega_o \cdot s + \omega_o^2)}{\omega_o^2\omega_m^2 - (s^2 + 2\xi_o\omega_o \cdot s + \omega_o^2)(s^2 + 2\xi_m\omega_m \cdot s + \omega_m^2)} \tag{49}$$

avec :

$$\omega_m^2 = \frac{k}{J_m},\ \xi_m = \frac{f_v / J_m}{2\omega_m},\ \omega_0^2 = \frac{k}{J_{pvt}} \text{ et } \xi_0 = \frac{d / J_{pvt}}{2\omega_0}$$

Les valeurs numériques de ces paramètres sont données dans le tableau 6.

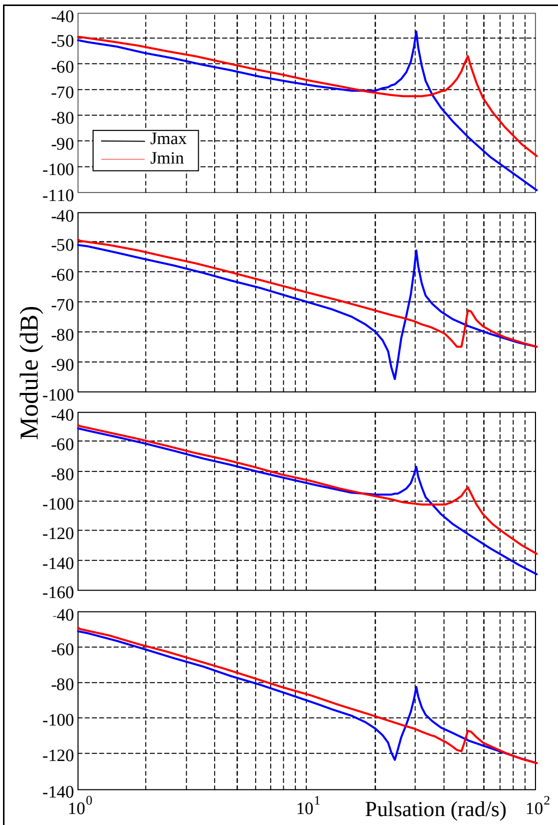
Paramètre	Valeur
ω_o	29,37 (rad/s)
ω_m	21,58 (rad/s)
ξ_o	0,02
ξ_m	$9 \cdot 10^{-4}$

Tableau 6: Paramètres du premier mode de l'axe Pivot

Il faut noter que le modèle ainsi établi correspond au modèle nominal quand les positions du Carc(θ_3) et de l'ascenseur (r_4) sont à 0. Cependant, cette configuration n'est pas toujours fixe et varie lors de l'utilisation du robot. En conséquence, le paramètre d'inertie J_{PVT} peut varier et ainsi modifier la fréquence du mode de vibration. En effet, selon la configuration du robot J_{PVT} varie entrainant en conséquence des modifications des pulsations caractéristiques du système $\omega_0^2 = k/J_{PVT}$. On obtient ainsi les valeurs limites suivantes :

$\theta_3 = \pm\frac{\pi}{2}$	$J_{PVT\,\min}$= 26,31 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$\omega_{0\max}$= 57,51 (rad/s)	$f_{\max}$= 9,15 Hz
$\theta_3 = 0$	$J_{PVT\,\max}$= 101 $\text{kg} \cdot \text{m}^2$	$\omega_{0\min}$= 29,37 (rad/s)	$f_{\min}$= 4,67 Hz

La figure 55 montre l'impact des variations de J_{PVT} sur la réponse fréquentielle du système. Nous montrerons dans le chapitre III que la non prise en compte de ces variations peut dégrader les performances du système voire conduire à son instabilité.



$$\frac{\dot{\theta}(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{3{,}16}{(s+0{,}68)(s^2+0{,}82\cdot s+911)}$$

$$\frac{\dot{\theta}_m(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{2.99(s^2+0{,}97\cdot s+591)}{(s+0{,}68)(s^2+0{,}82\cdot s+911)}$$

$$\frac{\theta(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{3{,}16}{s(s+0{,}68)(s^2+0{,}82\cdot s+911)}$$

$$\frac{\theta_m(s)}{\Gamma_m(s)} = \frac{2.99(s^2+0{,}97\cdot s+591)}{s(s+0{,}68)(s^2+0{,}82\cdot s+911)}$$

Figure 55: Mise en évidence de la variation de la pulsation propre du Pivot

3.1.2 Flexibilités de la structure du robot

Outre les flexibilités observées sur les axes des chaînes de motorisation, la structure souple du robot peut engendrer des modes oscillants en basse fréquence appelés modes de structure. Si ces modes sont dans l'axe de l'articulation, ils peuvent être modélisés comme une raideur de transmission. Toutefois, dans certains cas, ces modes ne sont pas liés aux articulations, tels que les modes d'oscillations au niveau de l'attache au bâti ou encore sur les corps peu rigides. Une analyse par éléments finis de la structure mécanique d'un robot manipulateur permet d'identifier ces modes de vibration. Cependant, cette approche utilisant souvent des représentations de type EDP, conduit à l'élaboration de modèles complexes et difficilement exploitables pour la synthèse des lois de commande ou encore l'analyse des systèmes. Nous proposons dans le cadre de cette étude d'élaborer des modèles génériques qui permettent de reproduire le comportement des modes de vibration, en introduisant des articulations virtuelles passives. Ces dernières, seront dotées d'un ressort et d'un amortisseur, dont les paramètres seront recalés à partir de mesures expérimentales pour reproduire le comportement des modes considérés. L'objectif de cette modélisation est d'obtenir des représentations :

- capables de reproduire les comportements vibratoires du système via l'ajout de flexibilités en des points sélectionnés en se fondant sur des résultats issus de l'analyse de modèles type éléments finis ou encore de l'analyse de résultats expérimentaux de la plateforme,
- d'obtenir des modèles d'une complexité « raisonnable » dans un objectif d'exploitation pour la synthèse des lois de commande.

3.1.2.1 Modèle dynamique de la structure flexible

Le modèle dynamique du robot (50) est recalculé en tenant compte de la nouvelle configuration. Ce modèle comporte deux parties : une première issue du modèle rigide complétée par un terme de couplage avec les variables décrivant les modes flexibles et une deuxième partie modélisant la souplesse.

Il faut noter que le modèle dynamique augmente rapidement en complexité avec le nombre d'articulations flexibles. Une hypothèse simplificatrice pourra être prise pour réduire la complexité des équations. En effet, l'amplitude des vibrations reste toujours faible. Dès lors, nous pourrons supposer que l'amplitude de mouvement des articulations virtuelles est négligeable et donc ne modifie pas les paramètres inertiels du robot (matrice d'inertie, …). En conséquence, lors du calcul des matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{Q}$ (relations (17) (19) (20)), nous pourrons poser $q_f = 0$. Les équations dynamiques du modèle flexible seront ainsi de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_r(q_\mathrm{r}) & \mathbf{A}_{rf}(q_r) \\ \mathbf{A}_{rf}(q_\mathrm{r}) & \mathbf{A}_f(q_r) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{q}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_r(q_r,\dot{q}) \\ \mathbf{C}_f(q_r,\dot{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_\mathrm{r}(q) \\ \mathbf{Q}_f(q) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}\cdot q_f + \mathbf{D}\cdot\dot{q} \end{bmatrix} \qquad (50)$$

L'équation dynamique décrivant le mode de vibration sera donnée par :

$$0 = \mathbf{A}_{rf}(q_r)\cdot\ddot{q}_r + \mathbf{A}_f(q_r)\cdot\ddot{q}_f + \mathbf{C}(q_r,\dot{q}) + \mathbf{Q}_f(q) + \mathbf{K}\cdot q_f + \mathbf{D}\cdot\dot{q} \qquad (51)$$

3.1.2.2 Modélisation des flexibilités du robot Innova Biplan

L'analyse expérimentale des vibrations sur le robot Innova Biplan latéral (Figure 56), nous montre la présence d'un mouvement pendulaire avant-arrière à 2,66 Hz. Ce mode de vibration est identifié expérimentalement via une analyse modale à partir de mesures d'accéléromètres placés sur la structure. Pour reproduire ce mode en simulation, nous avons intégré une articulation virtuelle représentant une raideur et un amortissement comme montré par le schéma cinématique de la figure 57.

Par ailleurs, l'analyse des modes de fonctionnement du robot (Chapitre I) montre que les modalités de prise d'images ne font pas appel à tous les mouvements articulaires pendant l'acquisition. Par exemple le chariot (C1), l'ascenseur du détecteur (C4) et du tube (C5) du robot Innova Latéral (Figure 56) sont immobiles lors de l'acquisition. De ce fait, leurs coordonnées de position peuvent être considérées comme des paramètres du modèle et non plus comme des variables ce qui permet de réduire significativement la complexité de la représentation.

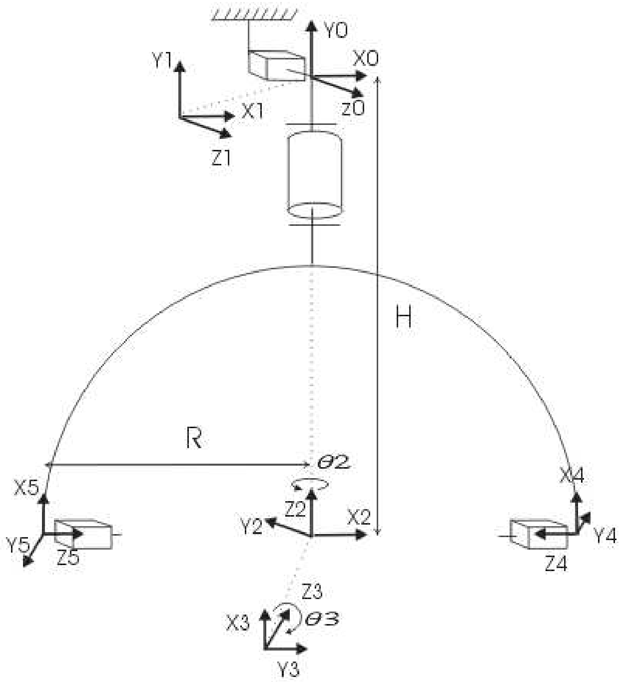


Figure 56 : Modèle géométrique du robot Innova Biplan, positionneur latéral

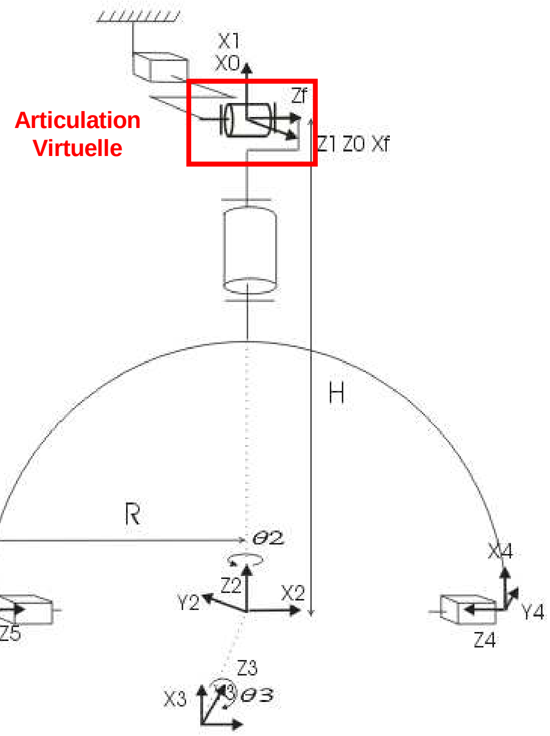


Figure 57 : Ajout d'une articulation virtuelle modélisant la flexibilité de l'attache au bâti

En tenant compte de ces hypothèses de simplification, le modèle dynamique du robot Innova latéral sera :

$$\begin{bmatrix}\Gamma_2\\ \Gamma_3\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_r(q_r) & \mathbf{a}_{rf}(q_r)\\ \mathbf{a}_{rf}(q_r) & \mathrm{a}_f(q_r)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \ddot{q}_f\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}C_1(q_r,\dot{q})\\ C_2(q_r,\dot{q})\\ C_f(q_r,\dot{q})\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ Q_{3r}(q)\\ C_f(q_r,\dot{q})\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ K\cdot q_f + D\cdot\dot{q}_f\end{bmatrix} \qquad (52)$$

où Γ_2 et Γ_3 sont respectivement les couples sur les axes du Pivot et du Carc.

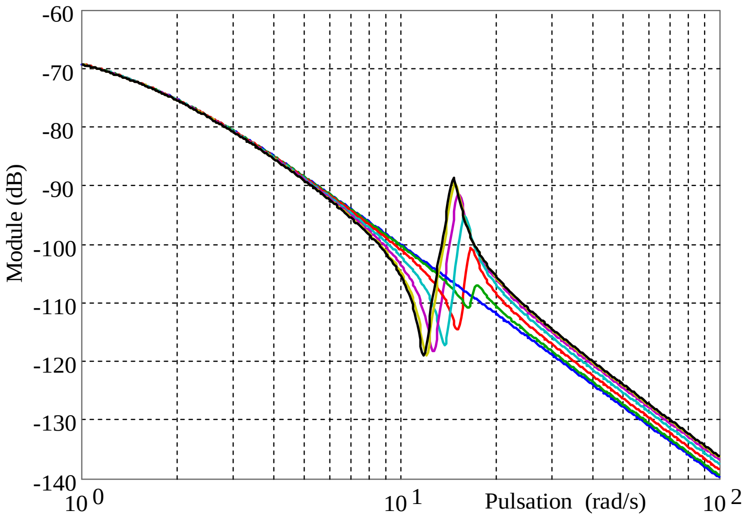


Figure 58 : Réponses fréquentielles du Carc, entrée couple – sortie vitesse, pour différentes position du Pivot (0 → 90°)

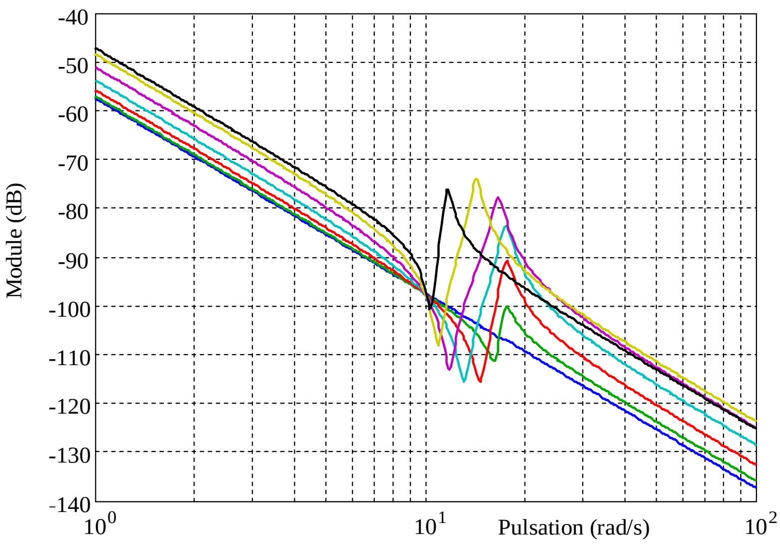


Figure 59 : Réponses fréquentielles du Pivot, entrée couple – sortie vitesse, pour différentes position du Carc (0 → 90°)

La figure 58 et la figure 59, montrent les réponses fréquentielles entre les couples et les vitesses, en fonction de la position du Pivot (C2) et du Carc (C3). Ces tracés montrent la variation des caractéristiques des modes de vibration comparativement aux positions angulaires du Pivot et du Carc. Ces réponses fréquentielles montrent que :

- la fréquence propre du Carc, pour la position du Pivot fixée (entre 0 et 90°), est dans la plage $\omega_0 \in [14{,}7\,;\,17{,}5\,]\,\text{rad/s}$,
- la fréquence propre du Pivot, pour la position du Carc fixée (entre 0 et 90°), est dans la plage $\omega_0 \in [11{,}6\,;\,17{,}6\,]\,\text{rad/s}$.

3.1.2.3 Modélisation des flexibilités du robot Agility

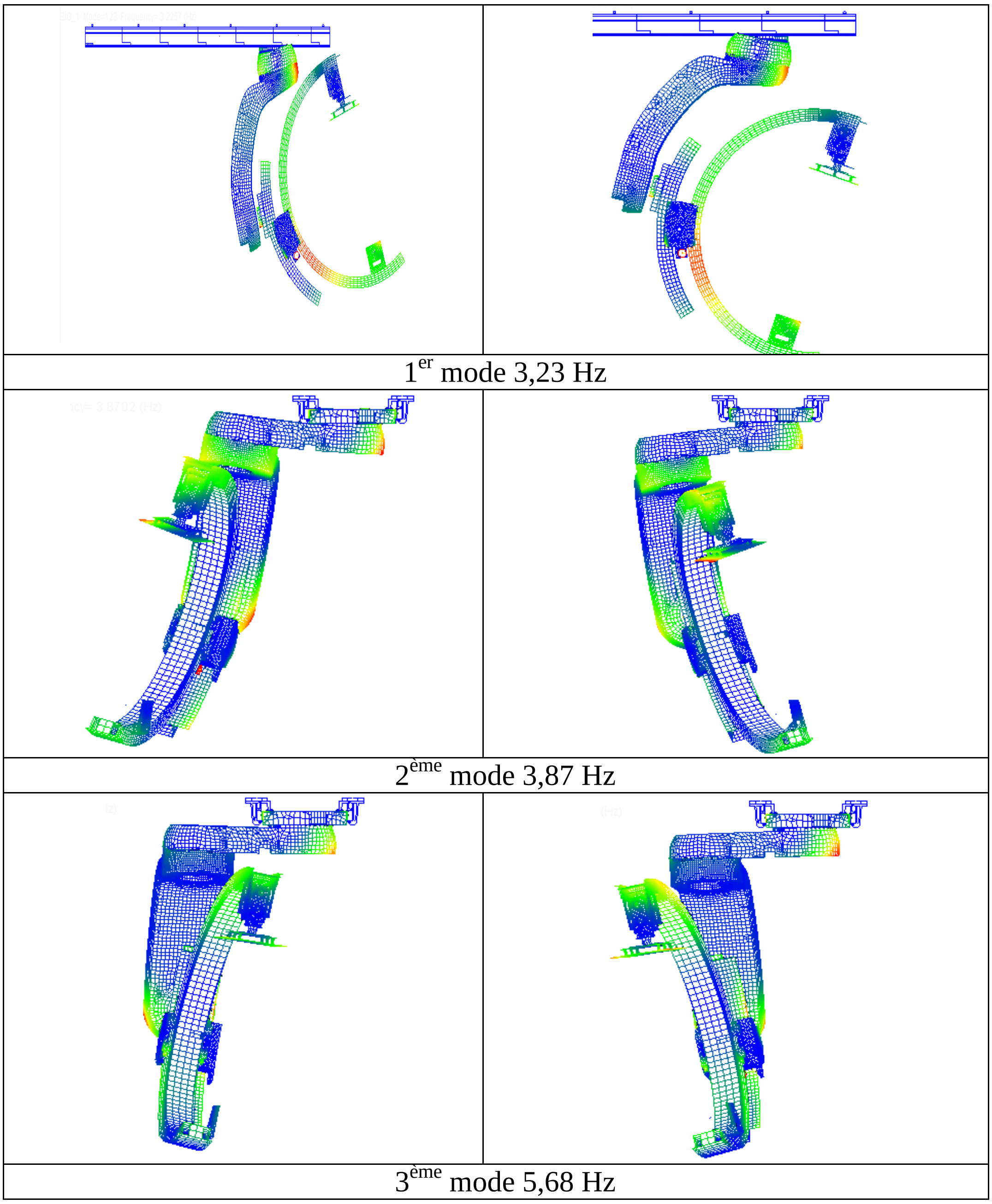


Figure 60 : Les trois premiers modes de vibrations du robot Agility

L’analyse par éléments finis de la structure du robot Agility (Figure 60) a permis d’identifier les modes de vibration en basse fréquence. Ces derniers ont un impact négatif sur les performances dynamiques du robot car ils se situent dans la bande passante du fonctionnement du robot.

Ces modes de vibration sont identifiés tels que :

– Le premier mode à 3,22 Hz correspond au mouvement pendulaire avant-arrière. Sa prise en compte dans le modèle peut être effectuée par l’ajout de l’articulation « f $_1$» dans le modèle rigide (Figure 61).

– Le deuxième mode à 3,87 Hz correspond au mouvement pendulaire gauche-droite. Il peut être modélisé par l’articulation « f $_2$».

– Finalement, le troisième mode à 5,68 Hz correspond à un mouvement de torsion au niveau de l’articulation Pivot du robot. Comme ce mode est dans le sens de l’axe, il pourra être modélisé par une flexibilité articulaire à l’instar de l’axe Pivot du robot Innova frontal décrit dans la section précédente.

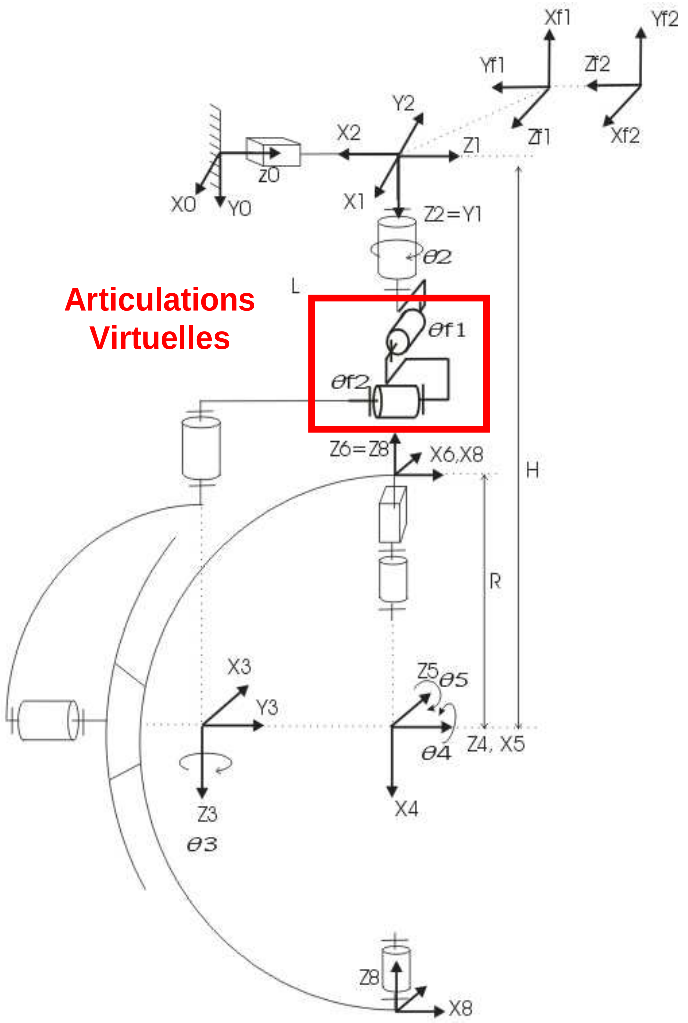


Figure 61: Modèle flexible du robot Agility

4 Compléments sur l'identification

Le recalage des différents paramètres est un complément important de la phase de modélisation. Le tableau 7 rappelle les paramètres nécessaires à déterminer pour chaque axe ainsi que leur adaptation au calcul ou à l'identification.

Paramètres (pour chaque axe)	Calculable	Identifiable expérimentalement
Paramètres inertiels:		
– Masse (M)	X	X
– Centre de gravité (X_g, Y_g, Z_g)	X	X
– Matrice d'inertie $(XX,\ XY,\ XZ,\ YY,\ YZ,\ ZZ)$	X	X
Moteur DC :		
– Constante de couple (K_t)	X	X
– Resistance (R)	X	X
– Inductance (L)	X	
Frottement (dans les sens direct et inverse du mouvement) :	Ordre de grandeur	
– Frottement sec au démarrage $(F_d,\ F_{d\_inv})$		X
– Frottement sec ($F_s,\ F_{s\_inv}$)		X
– Frottement visqueux ($F_v,\ F_{v\_inv}$)		X
– Rendement côté moteur/charge $(\eta_m,\ \eta_c)$		X
Réducteur :		
– Rapport de réduction (N)	X	X
– Raideur de transmission (k)		X

Tableau 7: Paramètres de modèle de bras de robot

En pratique les paramètres inertiels des modèles sont obtenus à partir des structures géométriques des robots. Le dimensionnement géométrique est relativement bien maitrisé aussi la connaissance des paramètres inertiels n'est soumise qu'à peu de dispersion. L'identification expérimentale s'impose cependant pour les modèles de frottement, les rendements, la raideur de la chaîne de transmission et le recalage des raideurs des axes virtuels.

L'identification expérimentale des paramètres de frottement et des modèles associés a été effectuée en trois temps :

- Identification du frottement sec et visqueux
- Identification du modèle statique
- Identification des frottements au démarrage et du rendement

4.1 Identification du frottement sec et visqueux

Il s'agit d'identifier les coefficients du frottement sec et visqueux en phase de mouvement. L'identification est effectuée à vitesse constante en utilisant un modèle de Coulomb complété par le terme de frottement visqueux. Soit le couple associé $\Gamma_f = f_v \cdot \dot{q} + f_s \,\mathrm{sgn}(\dot{q})$ où f_v et f_s dépendent du sens du mouvement :

- Répéter une trajectoire à vitesse constante pour différentes valeurs de la vitesse à chaque essai (Figure 62),
- Le couple charge ne varie pas pour une position donnée de l'axe, en conséquence la variation du couple moteur dépend de la variation du couple de frottement, on note cependant que le couple de charge dépend de la position.

A partir du couple moteur $\Gamma_m = \Gamma_c + \Gamma_f$ la caractéristique $\Gamma_f = \Delta\Gamma_m(\dot{q}) = f(\Omega)$ correspondant à l'écart entre deux essais, permet d'obtenir facilement f_v et f_s.

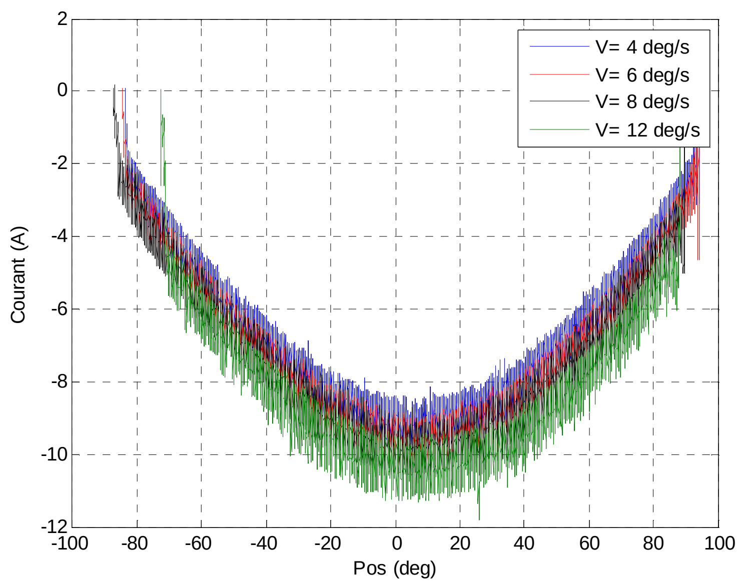


Figure 62: Courant moteur en fonction de la vitesse de mouvement

4.2 *Identification du modèle statique*

Le modèle global du robot est donné par la relation (53), l'identification du modèle statique (vecteur Q) peut être effectuée en opérant axe par axe en effectuant comme précédemment des essais à vitesse constante :

- Réalisation d'un essai sur un axe « i » à vitesse constante, la charge doit rester menante ou menée, le modèle devient $\Gamma_m = \eta_c Q(q) + \Gamma_f$
- Réalisation de l'essai pour différentes valeurs de q_j ; $j \neq i$ pour le même mouvement, i.e. modifier la position du Carc et du Lift lors de l'identification des paramètres de l'axe Pivot.
- Identification des paramètres du terme $\eta_c Q(q)$

$$\Gamma_m = \eta_c\big(A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + Q(q)\big) + \Gamma_f \tag{53}$$

4.3 *Identification du rendement au démarrage et du couple statique de frottement au démarrage*

Le modèle utilisé est $\Gamma_m = \eta_d Q(q) + \Gamma_{fd}$, l'identification a été effectuée par la méthode des moindres carrés dans les deux sens du mouvement. Pour une évolution en rampe de la tension d'alimentation du moteur, la mesure du courant maximal au démarrage (Figure 63) permet d'obtenir le couple statique Γ_{fd} compte tenu du couple de charge.

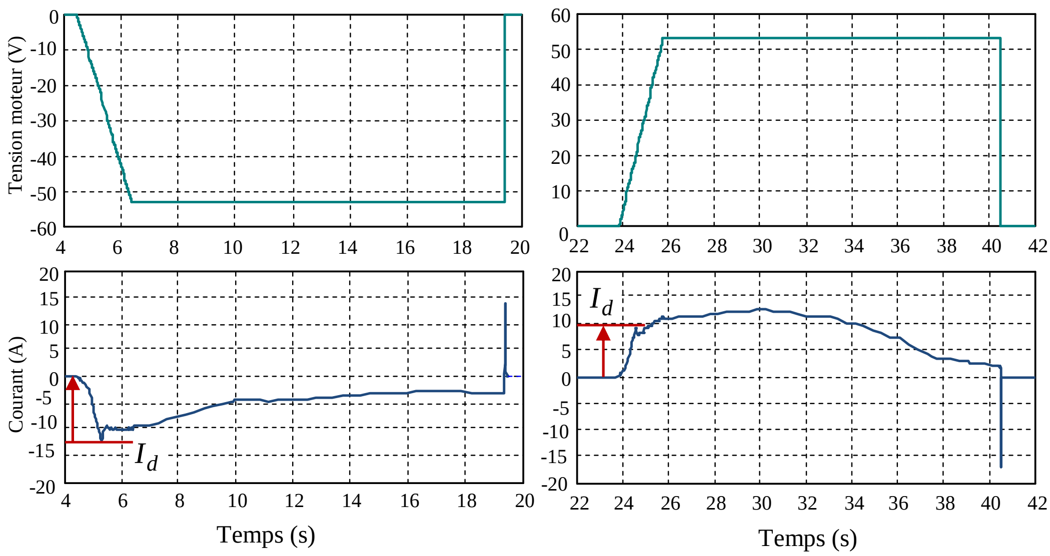


Figure 63 : Courant moteur en réponse à une évolution de la tension moteur

5 Analyse des modèles

Dans cette partie nous présentons une brève analyse des modèles obtenus pour le robot Innova Frontal. Cette analyse est effectuée dans le cas d'un modèle Pivot monoaxe (tous les autres axes étant supposés dans une position fixe) et dans le cas d'un modèle deux axes : Pivot et Carc. L'objectif de cette analyse est de mettre en évidence les variations des modèles selon les positions des articulations.

5.1 Analyse du modèle monoaxe Pivot

La figure 64 montre l'évolution des pôles de la fonction de transfert du modèle de l'axe Pivot (entrée couple sur l'axe) en fonction de la position angulaire du Carc $-45^{\circ} \leq \theta_{Carc} \leq 45^{\circ}$, pour une position de l'axe du pivot $\theta_{pivot} = 0$.

Cette figure montre que la pulsation et l'amortissement du mode propre varient légèrement avec la position du Carc. Cet effet est la conséquence de la variation du moment d'inertie et sa dépendance par rapport à la position angulaire du Carc.

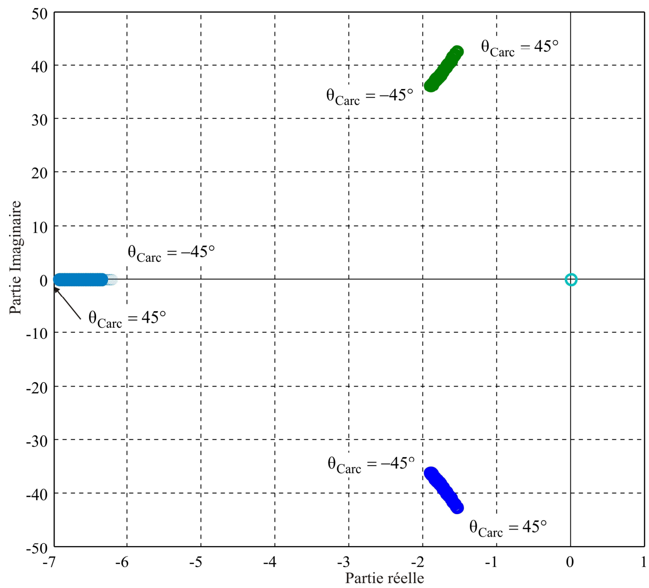


Figure 64 : Evolution des pôles de l'axe Pivot en fonction de la position angulaire du Carc

La figure 65 montre l'évolution des pôles du modèle linéarisé de l'axe du pivot en fonction de sa position angulaire et à position du Carc fixée $\theta_{Carc} = \text{constante}$. Ce tracé montre :

- Que les propriétés du mode oscillant sont indépendantes de la position de l'axe du pivot, cette caractéristique est due au fait que l'inertie du Pivot est indépendante de sa position et ne varie qu'avec la position du Carc.

- La présence de deux pôles réels dont l'emplacement dépend de la position du pivot, on peut noter par ailleurs que l'un des pôles se déplace entre les ½ plans droit et gauche.

– La position du pôle dans le ½ plan droit peut être interprétée physiquement en rapprochant le comportement de l'axe à celui d'un pendule inversé.

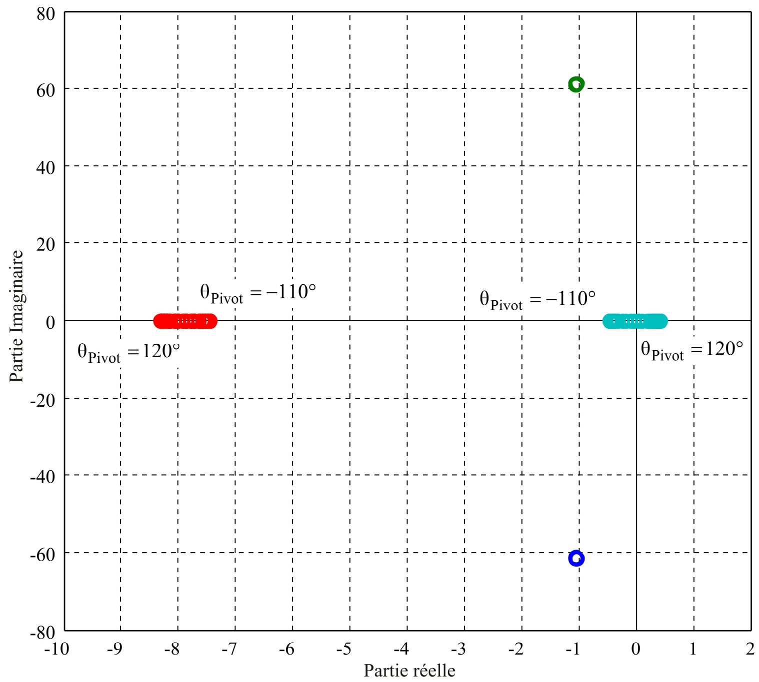


Figure 65 : Evolution des pôles de l'axe Pivot en fonction de la position angulaire du Pivot à θ_{Carc} constant

La figure 66 montre les diagrammes de Bode de l'axe Pivot (entrée couple sur l'axe) en prenant comme sortie la position du pivot et la figure 67 montre ces diagrammes en prenant comme sortie la vitesse du moteur. Ces deux figures :

– confirment qu'à position angulaire du Carc fixée les propriétés du mode souple sont indépendantes de la position du Pivot,

– montrent une dépendance des réponses fréquentielles par rapport à la position du pivot pour des pulsations inférieures à 10 rad/s ,

– dans le cas de la sortie en vitesse moteur, en pratique la sortie mesurée actuellement, la présence d'une résonance mais aussi d'une antirésonance. Cette propriété peut se révéler gênante pour l'asservissement lorsque la mesure est effectuée sur l'axe du moteur.

Enfin la figure 68 montre les diagrammes de Bode en sortie vitesse moteur en fonction de la position angulaire du Carc pour une position de l'axe Pivot $\theta_{Pivot} = \pi/2$. Ces tracés montrent :

– L'invariance des réponses fréquentielles en basse fréquence,

– L'évolution du mode résonnant selon la position angulaire du Carc

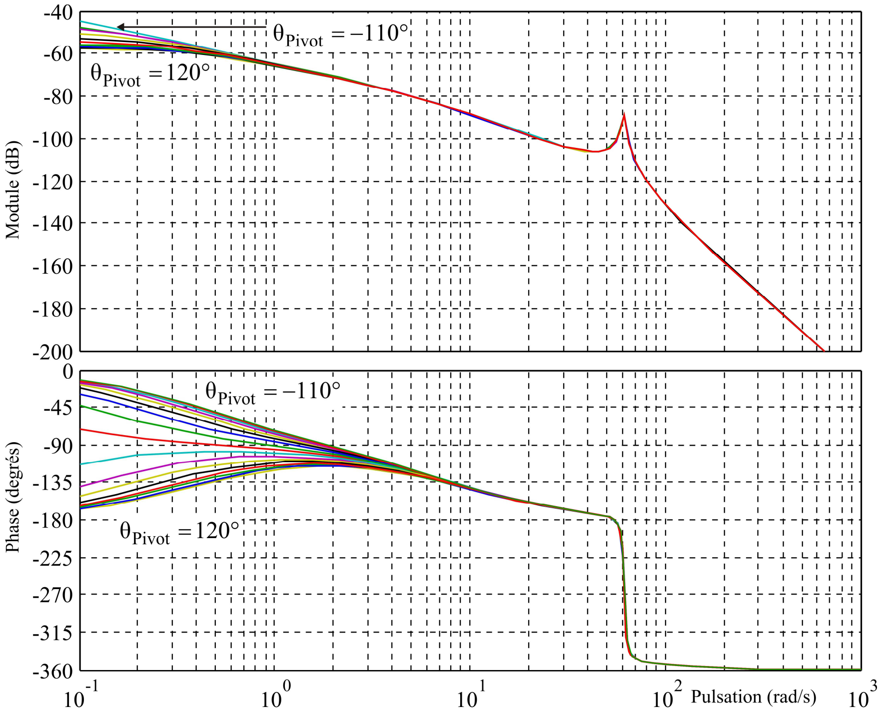


Figure 66 : Diagrammes de Bode de l'axe Pivot en fonction de θ_{pivot} ($\theta_{arc} = 0$), sortie position Pivot

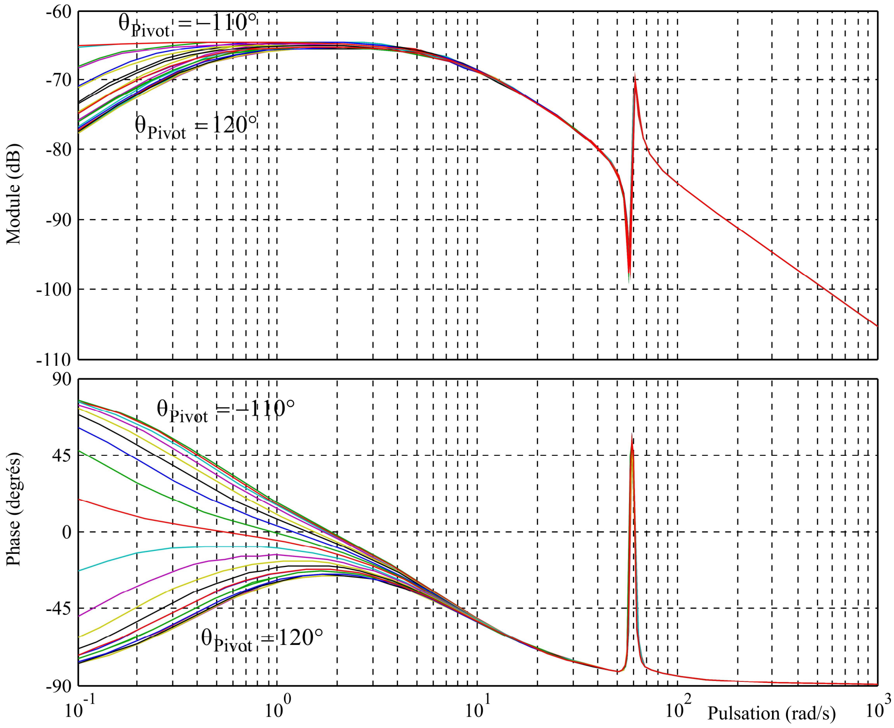


Figure 67 : Diagrammes de Bode de l'axe Pivot en fonction de θ_{Pivot} ($\theta_{arc} = 0$), sortie vitesse moteur

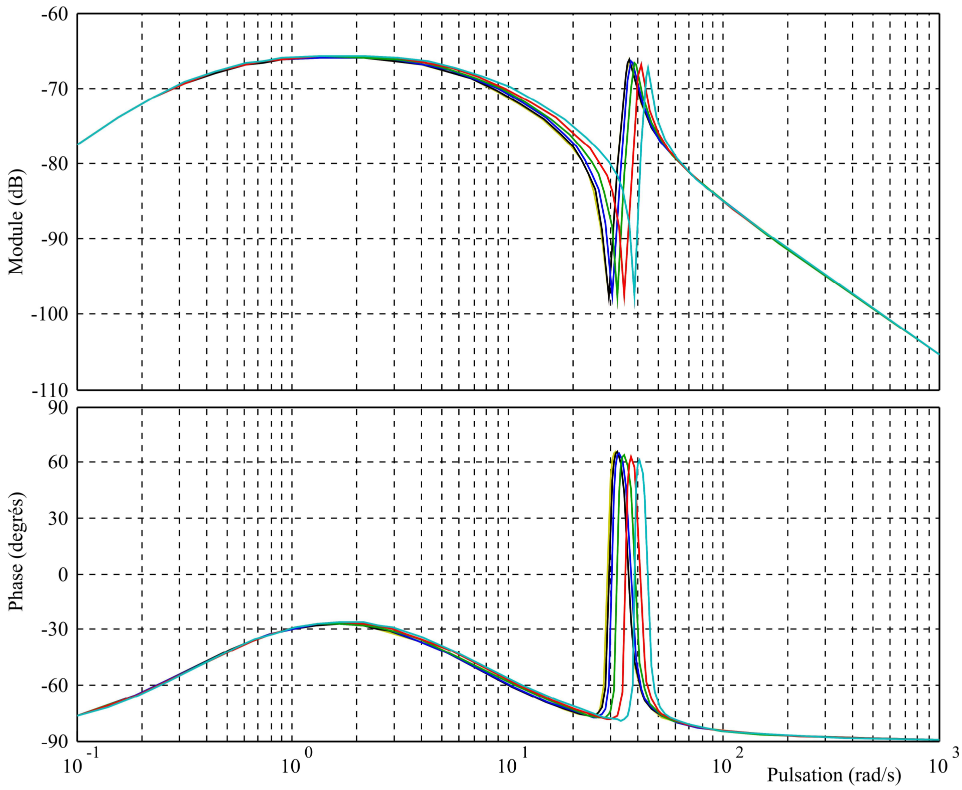


Figure 68 : Diagrammes de Bode de l'axe du pivot en fonction de θ_{Carc} ($\theta_{Pivot} = \pi/2$), sortie vitesse moteur

5.2 Analyse du modèle deux axes Pivot et Carc

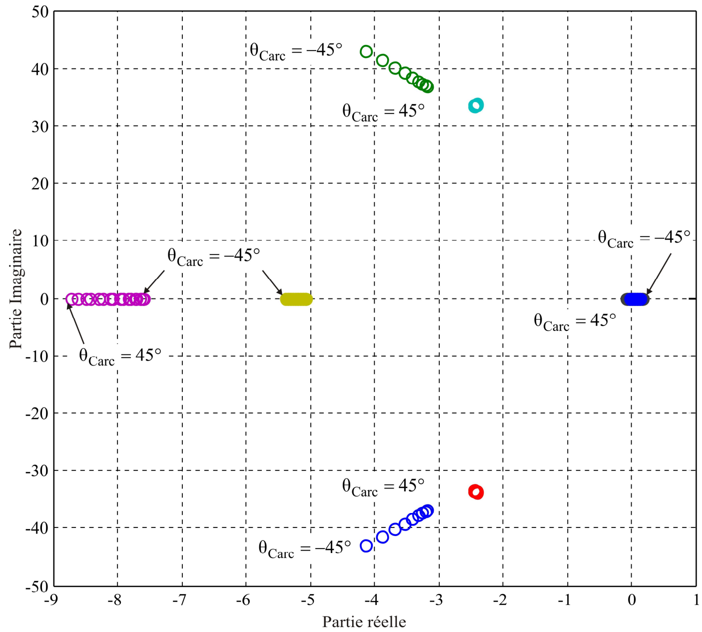


Figure 69 : Positions des pôles en fonction de la position angulaire du Carc

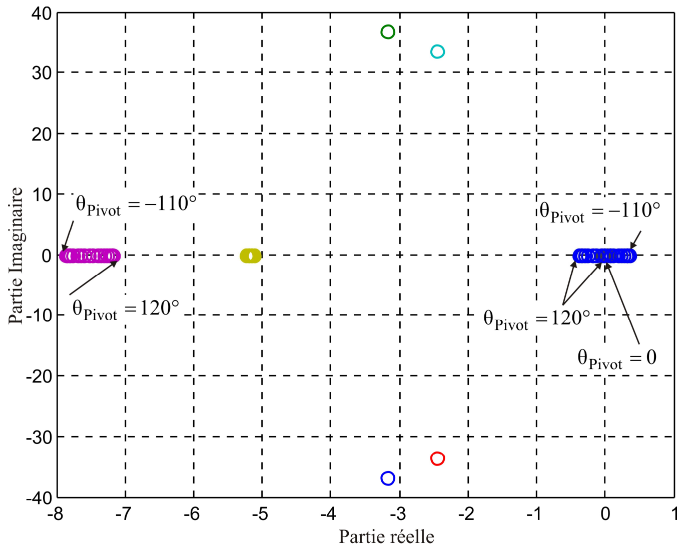


Figure 70 : Position des pôles en fonction de la position angulaire du Pivot, $\theta_{Carc} = 0$

La figure 69 montre la carte des emplacements polaires en fonction de la position angulaire du Carc et la figure 70 la carte des emplacements polaires en fonction de la position du Pivot θ_{Pivot}, autour d'un point de fonctionnement donné par $[\theta_{Pivot0} \;\; \theta_{Carc0}]^T$. Ces deux figures montrent la présence d'un nouveau mode oscillant de pulsation propre proche de celle du cas monoaxe :

– Une des pulsations propres varie selon la position angulaire du Carc

– Les deux pulsations propres sont indépendantes de la position du Pivot.

– Selon les positions angulaires du Carc ou du Pivot, on note la présence de pôles dans le ½ plan droit qu'on peut rapprocher d'un comportement du type pendule inversé autour de ces positions.

En prenant comme entrées les couples aux axes et comme sorties les vitesses moteur, les figures 71 à 78 donnent les réponses fréquentielles des différentes fonctions de transfert paramétrées selon la position angulaire du Pivot et du Carc autour d'un point de fonctionnement donné par $[\theta_{Pivot0} \;\; \theta_{Carc0}]^T$: transferts directs $(\Gamma_{Pivot} \to \Omega_{m\_Pivot}$ et $\Gamma_{Carc} \to \Omega_{m\_Carc})$ et couplages $(\Gamma_{Pivot} \to \Omega_{m\_Carc}$ et $\Gamma_{Carc} \to \Omega_{m\_Pivot})$. Ces courbes :

– Confirment l'analyse précédente sur la dépendance des pulsations propres comparativement aux positions du Pivot et Carc.

– La présence d'un zéro de transmission de pulsation proche de celle du mode oscillant, dépendante de la position du Carc et invariante par rapport à celle du Pivot.

– Les couplages, traduits par leurs réponses fréquentielles, sont relativement sensibles

- Pour une position fixe du Carc, au delà de la bande de pulsations de 10 rad/s, les réponses fréquentielles sont invariantes.
- La variation du signe du pôle à plus basse fréquence se traduit par l’évolution de la phase (signe ou variation).

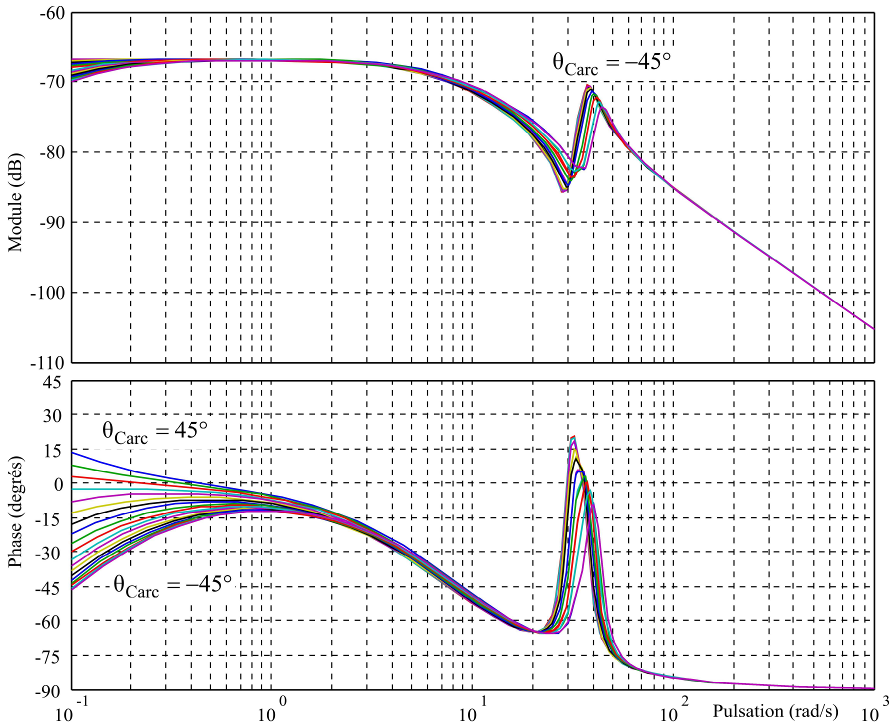


Figure 71 : Diagrammes de Bode $\Gamma_{Pivot} \rightarrow \Omega_{m\_pivot}$ en fonction de θ_{Carc} ($\theta_{pivot0} = 0$)

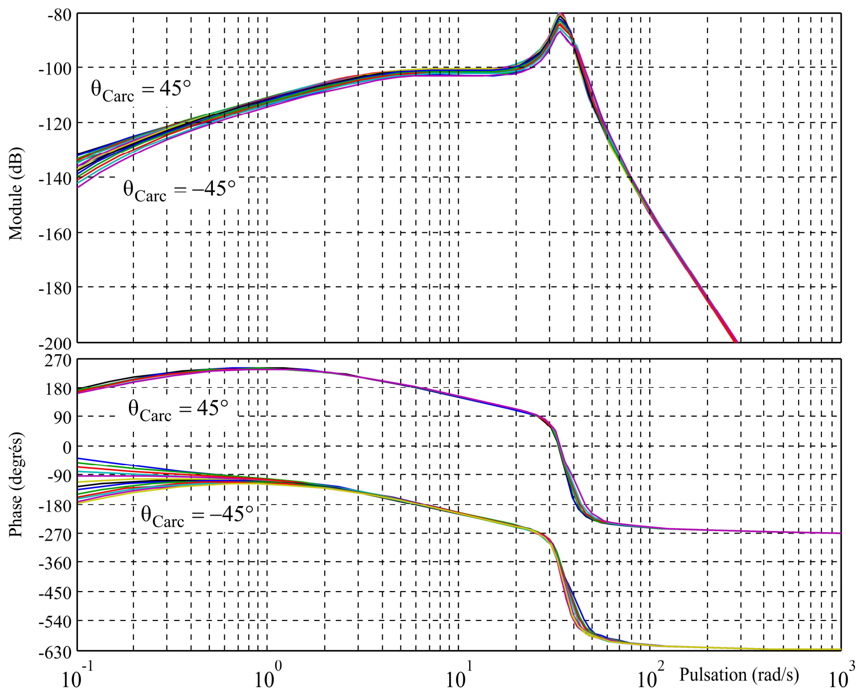


Figure 72 : Diagrammes de Bode $\Gamma_{Pivot} \rightarrow \Omega_{m\_Carc}$ en fonction de θ_{Carc} ($\theta_{pivot0} = 0$)

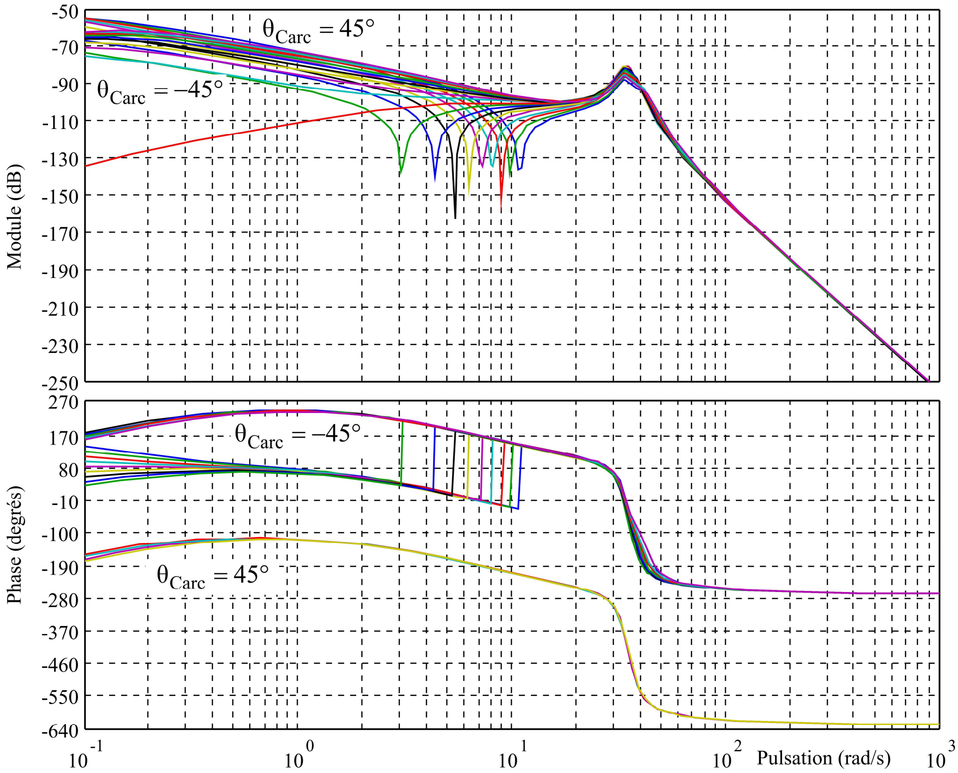


Figure 73 : Diagrammes de Bode $\Gamma_{Carc} \rightarrow \Omega_{m\_pivot}$ **en fonction de** θ_{Carc} **(** $\theta_{pivot0} = 0$ **)**

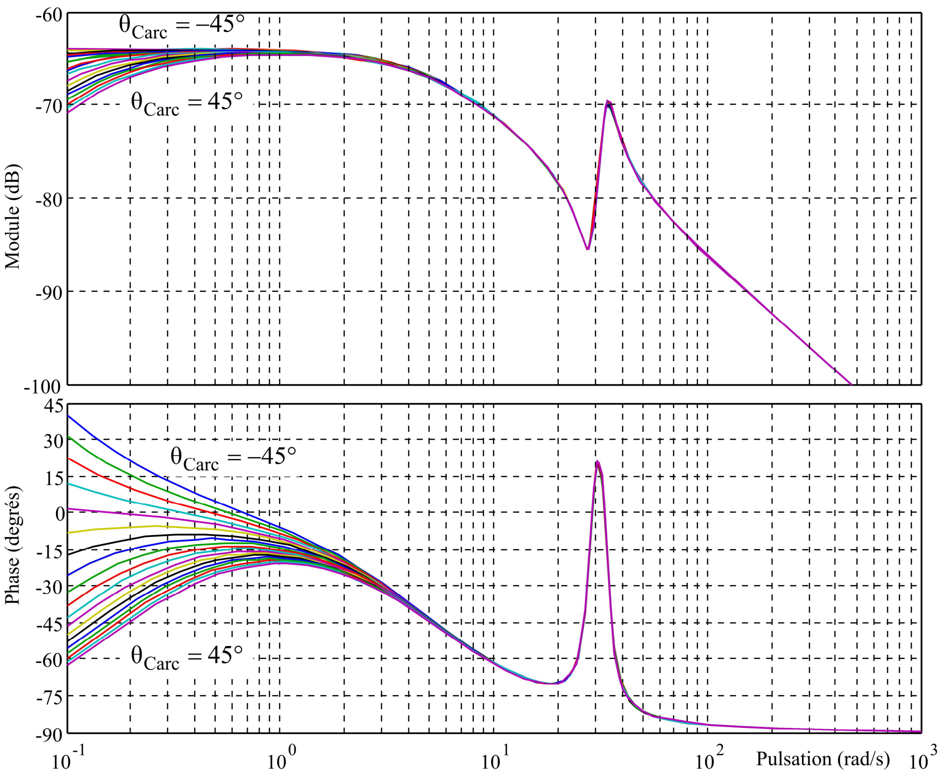


Figure 74 : Diagrammes de Bode $\Gamma_{Carc} \rightarrow \Omega_{m\_Carc}$ **en fonction de** θ_{Carc} **(** $\theta_{pivot0} = 0$ **)**

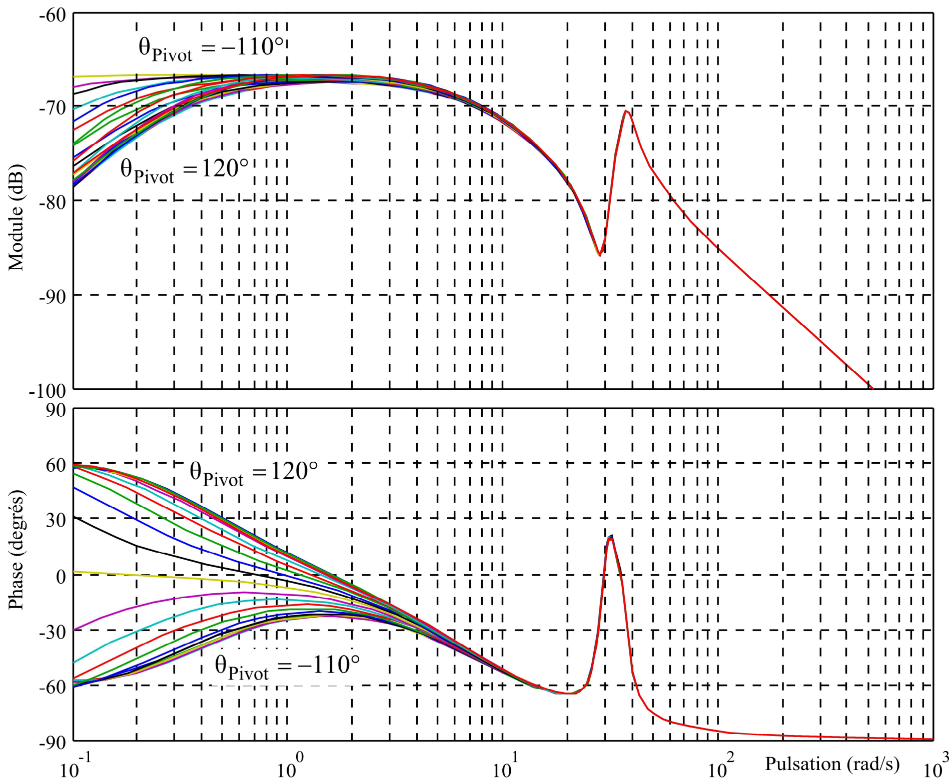


Figure 75 : Diagrammes de Bode $\Gamma_{pivot} \to \Omega_{m\_pivot}$ en fonction de θ_{Cpivot} ($\theta_{Carc} = 0$)

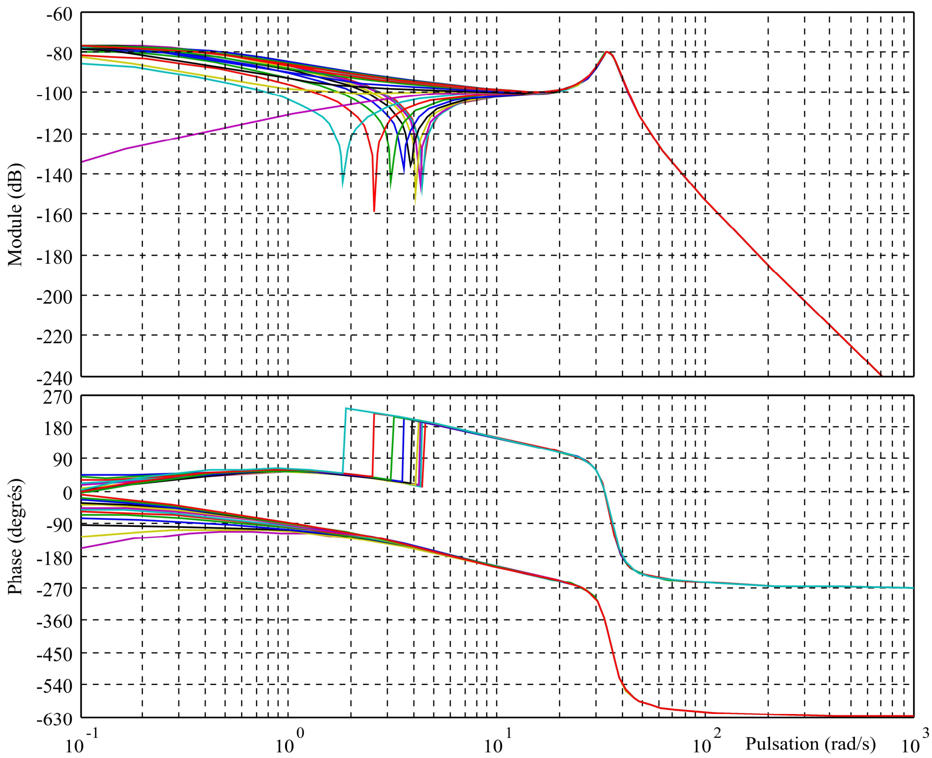


Figure 76 : Diagrammes de Bode $\Gamma_{pivot} \to \Omega_{m\_Carc}$ en fonction de θ_{Cpivot} ($\theta_{Carc} = 0$)

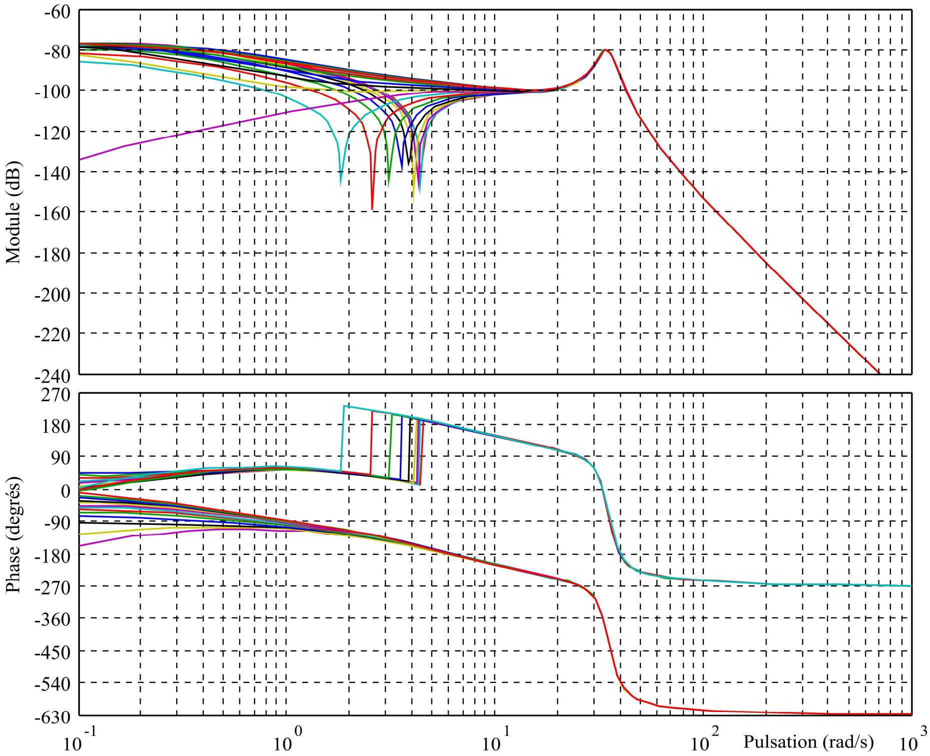


Figure 77 : Diagrammes de Bode $\Gamma_{Carc} \rightarrow \Omega_{m\_pivot}$ en fonction de θ_{Cpivot} ($\theta_{Carc} = 0$)

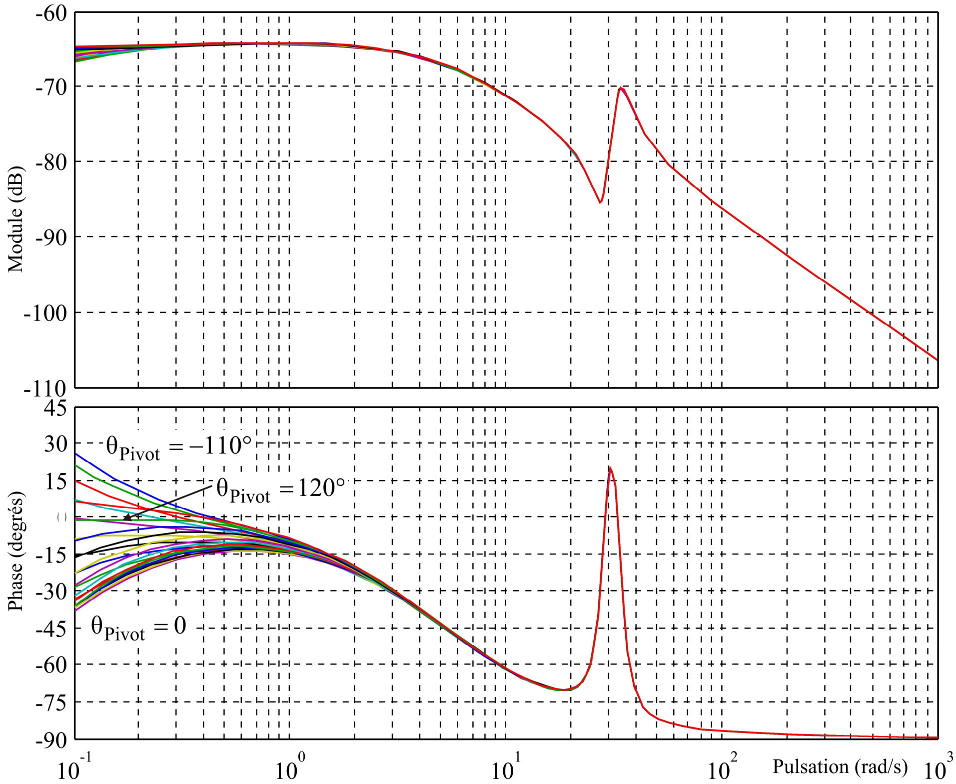


Figure 78 : Diagrammes de Bode $\Gamma_{Carc} \rightarrow \Omega_{m\_Carc}$ en fonction de θ_{Cpivot} ($\theta_{Carc} = 0$)

6 Conclusion

La modélisation géométrique et dynamique abordée dans ce chapitre en utilisant une approche basée sur les équations de Lagrange a permis de définir et de calculer les modèles des différents robots médicaux conçus par GE Healthcare et aussi pour un projet futur. Ce travail a porté sur le paramétrage et sur la mise en équations de la structure mécanique.

La modélisation incorpore la structure rigide mais aussi la prise en compte des élasticités, en particulier les premiers modes, en introduisant des articulations virtuelles. Les paramètres associés ont été déterminés pour reproduire le comportement dû aux premiers modes, c'est-à-dire les plus gênants car situés dans la bande passante du système.

La structure des chaînes de transmission a été abordée et en particulier une approche de modélisation des transmissions irréversibles basée sur une machine d'états a été proposée. L'efficacité de l'approche proposée, en particulier l'aspect irréversible, a été vérifiée à partir de validations expérimentales.

En parallèle des travaux sur les méthodes de modélisation, un outil de CAO a été défini et implémenté en utilisant l'environnement Matlab-Simulink pour faciliter le travail de modélisation. Cet outil comporte la description géométrique et dynamique du robot, la caractérisation des chaînes de transmission et enfin celle des moteurs.

L'analyse effectuée sur le robot Innova deux axes, système qui sera retenu dans la suite pour l'étude des lois de commande, a montré :

- Que les fréquences propres des modes élastiques sont essentiellement liées à la position du Carc, cette variation est due à la modification de la géométrie, qui conduit à la variation des matrices d'inertie.
- Que les positions articulaires du Pivot modifient de manière importante le comportement basse fréquence mais au delà d'une pulsation de 10 rad/s les modèles deviennent peu dépendants de la position du Pivot.
- Dans le cas du modèle deux axes le couplage entre axes n'est pas négligeable.

En somme, d'un point de vue méthodologique, les notions développées dans ce chapitre ont permis d'établir une procédure systémique de modélisation adaptée à une problématique industrielle réelle en vue de l'élaboration du modèle de commande. L'accent dans ce travail a été mis sur le compromis entre la richesse du modèle d'une part et la facilité de son exploitation pour la synthèse de la loi de commande d'autre part.

Chapitre III

Méthodologie de commande monoaxe

Chapitre III. Table des matières

1 Intérêt de l'architecture monoaxe

Dans les chaînes de motorisation des bras de robots manipulateurs, il est d'usage de recourir à des réducteurs à fort rapport de réduction tels que les roue-vis sans fin, les vis à billes et les harmonic drives. En effet, ces derniers permettent de transformer une entrée côté moteur caractérisée par un faible couple et une vitesse élevée à une sortie appliquée sur l'axe du robot de couple élevé et de vitesse faible. A l'inverse d'une motorisation directe, cette approche permet de réduire les effets liés à la variabilité de l'inertie et les effets de couplage, ce qui facilite en conséquence l'asservissement du système. Toutefois, cette approche accentue les effets liés aux frottements et en général conduit à des chaînes de motorisation de faible rendement.

En analysant, l'équation dynamique du mouvement d'un robot (Chapitre II-2.1.3), on note que :

$$\Gamma_m = J_m \cdot \ddot{q}_m + N^{-1}(A(q)\cdot \ddot{q} + C(q,\dot{q}) + Q(q))$$

En exprimant cette équation côté moteur i.e. $q_m = N \cdot q$, on obtient:

$$\Leftrightarrow \Gamma_m = (J_m + N^{-2}A(q))\cdot \ddot{q}_m + N^{-1}\cdot(C(q,\dot{q}) + Q(q)) \tag{54}$$

Cette expression nous confirme que lors de l'utilisation d'un rapport de réduction élevé dans la chaîne de motorisation, l'effet de dynamique et de couplage entre axes devient négligeable. En conséquence, l'utilisation d'une approche de commande monoaxe est tout à fait justifiée dans ce cas.

Si nous reprenons le schéma classique de régulation (Figure 79), l'étude dans le cadre monoaxe consistera à mettre en évidence la contribution des trois actions de commande, à savoir, la trajectoire, l'anticipation et le correcteur, dans le cadre du contrôle des vibrations.

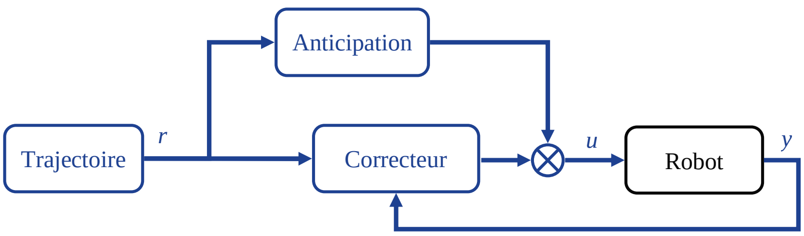


Figure 79: Schéma de régulation

D'un point de vu applicatif, cette approche monovariable présente un grand intérêt car son implémentation ne requiert pas la modification de l'architecture matérielle du robot Innova. Dans un premier temps, nous allons présenter le contrôleur actuellement implémenté sur les cartes de contrôle du robot Innova MCB (Motion Control Board). Ensuite, nous allons analyser différentes stratégies de conception de lois de commande utilisant les techniques suivantes :

- **Pour la génération de trajectoire**
  - Techniques de filtrage passif
  - Technique de platitude
  - Technique de freinage en deux temps
- **Pour l'action d'anticipation**
  - Compensation du couple de charge.
  - Compensation de la dynamique du mouvement rigide
  - Compensation de la dynamique des vibrations dérivée de la platitude
- **Pour le correcteur**
  - Régulation cascade
  - Régulation par retour d'état et observateur
  - Synthèse H_∞

2 Présentation du système à commander

Dans le cadre monoaxe, nous allons étudier la conception de la loi de commande de l'axe Pivot du robot Innova monoplan, présenté dans le chapitre II, modélisé par un système linéaire invariant. Notons que le terme de la pesanteur n'est pas pris en compte dans le modèle de synthèse. En effet :

- cet effet est assimilé dans un premier temps à une perturbation,
- la robustesse vis-à-vis de ses conséquences sur le modèle pourra être analysée dans la suite pour conclure sur la validité de ce choix,
- le couple de pesanteur peut être compensé suivant l'architecture de commande adoptée,
- si la bande choisie est au delà de 10 rad/s, le modèle est invariant.

Rappelons la réalisation (A, B, C, D) du modèle établi autour d'un point de fonctionnement :

$$H:\begin{cases}\dot{X}=\begin{bmatrix}-\frac{d}{J_{PVT}} & 0 & -\frac{k}{J_{PVT}} & \frac{k}{J_{PVT}}\\ 0 & -\frac{f_v}{J_m} & \frac{k}{J_m} & -\frac{k}{J_m}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot X+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{J_m}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\cdot\Gamma_m\\ Y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot X+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\cdot\Gamma_m\end{cases}\tag{55}$$

où le vecteur d'état comprend les vitesses et positions du moteur et de l'articulation :

$$X=\begin{bmatrix}\dot{\theta} & \dot{\theta}_m & \theta & \theta_m\end{bmatrix}^T$$

2.1 Analyse des propriétés de commandabilité et observabilité

Dans le cas de modèles LTI, classiquement la commandabilité du système peut être vérifiée grâce au critère de Kalman *(Kalman 1960, Ogata 1997),* en calculant le rang de la matrice de commandabilité :

$$\mathrm{Crtl}(A,B)=\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\tag{56}$$

$$\det\left[\mathrm{Crtl}(A,B)\right]=\frac{k^2}{J_m^4 J_{pvt}^2}\neq 0\Rightarrow \mathrm{rang}\left[\mathrm{Crtl}(A,B)\right]=4$$

Comme la matrice de commandabilité est de rang plein, le système étudié est commandable. Par ailleurs, l'écriture du système sous la forme modale nous permet de mieux apprécier le degré de commandabilité et en particulier de mettre en évidence cette propriété pour chaque mode. En effet, nous avons :

$$A=\begin{bmatrix}-1{,}9 & 36 & 0 & 0\\ -36 & -1{,}9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -6{,}2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\ B=\begin{bmatrix}0{,}062\\ -0{,}01\\ -0{,}18\\ 0{,}16\end{bmatrix};\ C=\begin{bmatrix}0{,}029 & 0{,}005 & -0{,}02 & 0\\ 0 & -0{,}0008 & 0{,}003 & 0{,}003\end{bmatrix}$$

Tous les éléments de la matrice B sont non-nuls ce qui confirme bien que tous les modes sont commandables, donc le système l'est aussi. En revanche, il nous informe que le mode oscillant sont caractérisés par des coefficients plus faibles dans la matrice de commande ce qui peut traduire un plus faible degré de commandabilité.

Par ailleurs, il faut rappeler que les mesures disponibles pour la boucle d'asservissement sont limitées à la position et la vitesse de l'arbre moteur. Bien que ces deux mesures suffisent pour l'asservissement du système, elles ne permettent pas d'obtenir des lois de commande performantes et plus particulièrement en termes de réduction des vibrations. La position de la charge n'étant pas mesurable, l'utilisation d'une commande de type retour d'état nécessitera donc de recourir à des techniques d'estimation.

Au regard de la matrice C sous forme modale, on peut vérifier que le système est observable car toutes les variables d'états contribuent dans la sortie mesurée.

2.2 Objectifs de commande

La loi de commande de l'axe Pivot est conçue dans l'objectif d'amortir les modes résonnants dus à l'élasticité de la structure. De plus, elle doit répondre au cahier des charges suivant :

- Distance d'arrêt du tube, *Stop Distance* = 10 mm
- Amplitude des vibrations de la chaîne image après 1 seconde, suite à la première oscillation, inférieure à 0,2 mm (Figure 80).
- Accélération maximale, définie de telle façon que le tube s'arrête sur une distance inférieure à 10 mm pour une vitesse initiale de 20°/s.
- Courant maximal inférieur à 20A : $I_{max} = 20$ A .

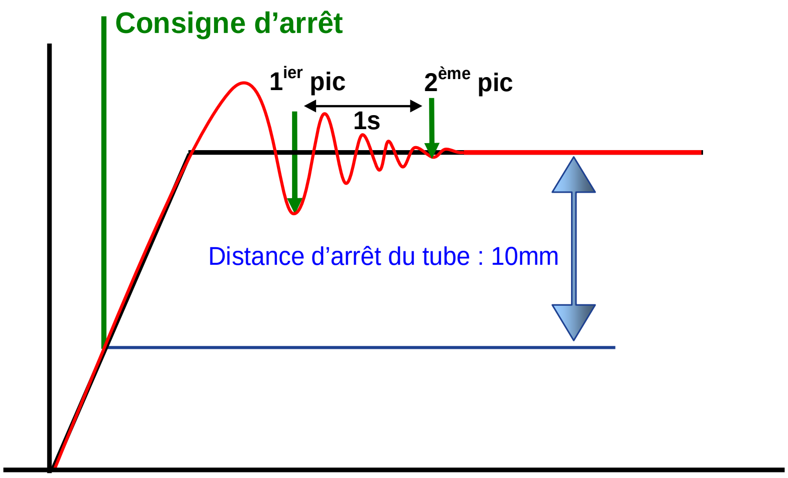


Figure 80: Spécifications du profil d'arrêt

Nous pouvons constater que les spécifications imposées par le cahier des charges sont des spécifications de haut niveau (cahier des charges utilisateur). Elles englobent à la fois des aspects liés à la sécurité du système, la distance d'arrêt du tube, et des aspects liés à la qualité du système, à savoir, la vibration de la chaîne image. Dans le cadre de cette étude, ces spécifications doivent être reformulées afin de définir des objectifs d'asservissement par rapport aux variables d'état du système.

En effet, comme le rayon du « Carc » est R=0,65 m (Chapitre II- figure 11), la distance d'arrêt et l'amplitude de la vibration ramenées à l'axe du Pivot sont :

- $\theta_{arrêt} = \dfrac{\text{Stop distance}}{\text{R}} = 0{,}0154 \text{ rad} = 0{,}8815°$
- $\theta_{vibration} = 0{,}019°$

Par ailleurs, la définition de l'accélération maximale implique que le temps de freinage est : $t_{\text{freinage}} = 20/a_{\max}$ (Figure 81). Comme, nous avons : $\theta_{arrêt} = 20 \cdot t_{\text{freinage}}/2$, on en déduit l'accélération maximale $a_{\max} = 227°/s^2$.

Enfin, le couple maximal autorisé est : $\Gamma_{\max} = N \cdot K_t \cdot I_{\max} = 3100 \text{ Nm}$.

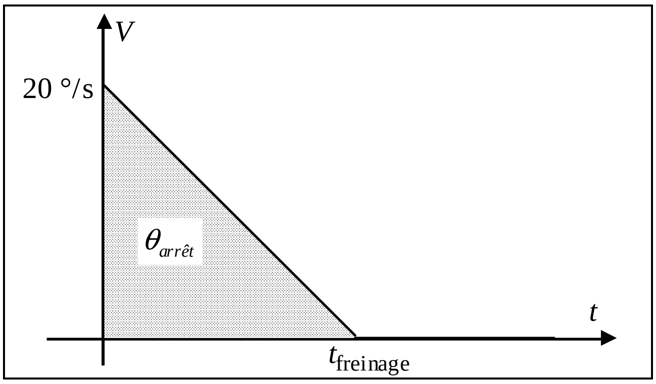


Figure 81: Profil de freinage avec accélération maximale

2.3 *Présentation du contrôleur du robot Innova*

Le contrôle des mouvements sur les robots Innova *monoplan* et *biplan*, a une architecture *monovariable* «commande axe par axe». Chaque axe est piloté par une structure de régulation en cascade (*Godoy 2007*) intégrant une boucle de courant, une boucle de vitesse et une boucle de position(Figure 82). Ce régulateur est implémenté sur une carte appelée MCB « Motion Control Board ».

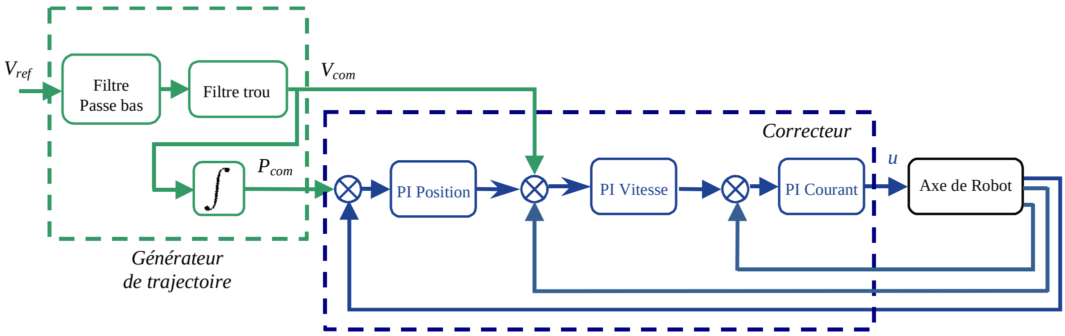


Figure 82: Architecture de contrôle sur la MCB

La consigne de vitesse V_{ref} provient du Superviseur (Chapitre I- figure 12) qui gère la génération de trajectoire de haut niveau. En effet, le Superviseur transmet les consignes sous forme d'échelons de vitesse selon deux modes :

- En mode automatique les trajectoires sont calculées hors ligne, elles correspondent à des modalités spécifiques de l'application médicale (par exemple une acquisition rotationnelle 3D) ou en auto-positionnement (repli en position « parking »).
- En mode manuel, la consigne est interprétée directement à partir de la manette de commande.

En réalité, l'utilisation de la consigne brute comme une entrée de référence n'est pas préconisée. D'une part, le contenu fréquentiel de la consigne échelon peut exciter les modes résonnants du système et ainsi dégrader ses performances, voire conduire à son instabilité. D'autre part, ce type de consigne en vitesse implique des accélérations importantes ce qui se traduit, en pratique, par la mise en évidence de phénomènes non-linéaires gênants tels que la saturation des courants de commande ou bien des surtensions. Dès lors, il convient d'intégrer un générateur de trajectoire de bas niveau (Figure 82) qui permet d'adapter la trajectoire aux spécificités du système. En effet, ce dernier comporte un filtre passe bas de second ordre qui permet de limiter l'accélération du système. De plus, il est doté d'un filtre coupe bande « *Notch Filter* » utilisé dans le but de supprimer (ou plus précisément d'atténuer) l'amplitude du premier mode de vibration. Dans la suite de ce mémoire, nous allons analyser plus en détails ces techniques de filtrage passif.

3 Méthodes de génération de trajectoires

Dans le cadre de la conception d'une loi de commande d'un système ayant des flexibilités, la trajectoire de référence peut jouer un rôle important dans la réduction des vibrations tout en garantissant des performances dynamiques optimales. Selon que nous disposons ou pas d'un modèle dynamique du système, deux approches de génération de trajectoire peuvent être envisagées :

- Si le modèle du système n'est pas très bien connu, il convient de baser la planification de la trajectoire sur des techniques de filtrage passif. Dans ce cas, ces dernières permettent d'éliminer en aval le contenu fréquentiel dangereux de la consigne de référence en se basant uniquement sur la connaissance *a priori* des modes de vibration du système.
- En revanche, quand le modèle est connu et à condition que les caractéristiques structurelles du système le permettent alors la trajectoire peut être planifiée en se basant sur des approches comme la platitude, pour déplacer le système de son état initial vers l'état final sans exciter les modes de vibration.

3.1 Les techniques de filtrage passif

Quand le modèle dynamique du système n'est pas précisément connu, ou bien quand l'architecture matérielle du régulateur limite le volume de calculs en temps réel, l'utilisation de filtres passifs est préférable pour minimiser les vibrations dues à la flexibilité du système. En effet, les filtres passifs garantissent une trajectoire de référence sans contenu fréquentiel pouvant exciter les modes propres du système.

Classiquement, la consigne est filtrée par une fonction du second ordre (57). Ce filtrage permet d'assurer une continuité de l'accélération et de limiter son amplitude via l'ajustement de la constante de temps du filtre. En outre, ce dernier permet de supprimer le contenu hautes fréquences de la trajectoire afin de ne pas exciter des modes de vibration hautes fréquences qui sont généralement mal connus.

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{(1+T\cdot s)^2} \tag{57}$$

De même, les modes propres en basse fréquence peuvent être supprimés grâce à l'utilisation d'un filtre coupe bande ou filtre trou (Figure 83), défini tel que :

$$\frac{Y}{X} = \frac{s^2+\omega_0{}^2}{s^2+2\cdot\xi_N\cdot\omega_0\ s+\omega_0{}^2} \tag{58}$$

où ω_0 est la pulsation propre du filtre, correspondant au mode à filtrer et ξ_N le coefficient d'amortissement du filtre.

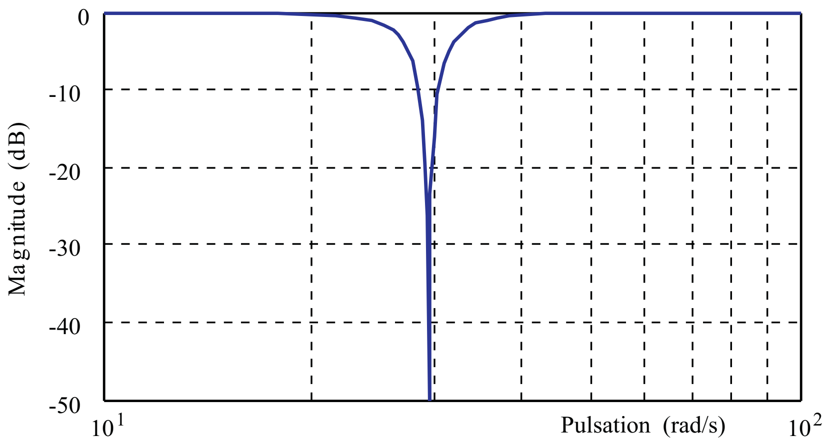


Figure 83: Réponse fréquentielle du Filtre trou

Dans le cadre du robot Innova, la pulsation propre du filtre est ajustée pour rejeter le premier mode de vibration de l'axe Pivot, à savoir, $\omega_0 = 2\pi\cdot 4{,}67 = 29{,}34\ \text{rad/s}$. La figure 84 montre la réduction significative (mais non totale) de l'amplitude de vibration du Pivot grâce à l'utilisation des techniques de filtrage passif.

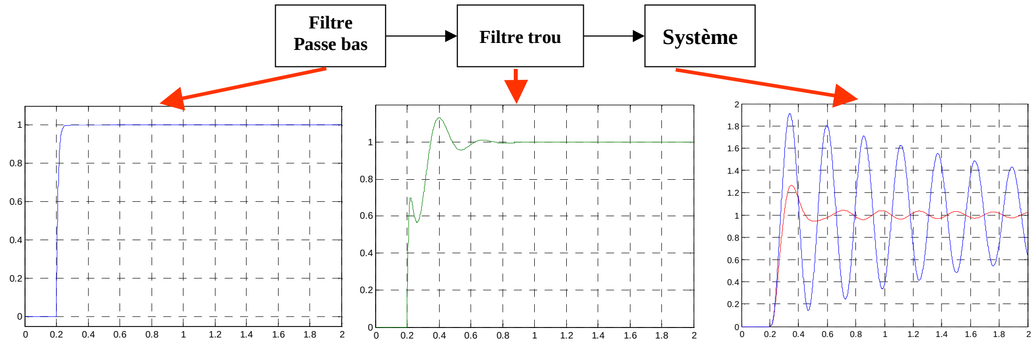


Figure 84: Filtrage de la consigne de référence

3.2 La technique de platitude

La planification des trajectoires en utilisant la notion de platitude a été introduite en 1992 par M. Fliess, J. Lévine, P. Martin et P. Rouchon (Fliess, Lévine et al. 1992; Martin 1992). En effet, le concept de platitude d'un système nonlinéaire permet d'apporter une solution très séduisante au problème de poursuite de trajectoire. Cette approche consiste à imposer une dynamique spatiale au procédé par l'intermédiaire d'une commande dite plate correspondant à l'inverse du système (Fliess, Lévine et al. 1995).

Un système est ***différentiellement plat*** (ou simplement ***plat***) si son comportement peut être complètement décrit par un ensemble de fonctions différentiellement indépendantes. Autrement dit, il ne dépend que des variables du système et de leurs dérivées. Dès lors, toute trajectoire du système peut s'obtenir à partir de cet ensemble de fonctions sans intégration d'équations différentielles. En somme, un système est considéré plat s'il est équivalent à un système « sans dynamique ».

En d'autres termes, un système nonlinéaire, $\dot{x} = f(x,u)$, est ***différentiellement plat*** s'il existe une sortie $y(t)$, *appelée* ***sortie plate*** *ou* ***sortie linéarisante***, telle que (*Lévine 2004*) :

- L'état $x(t)$ et la commande $u(t)$ s'expriment en fonction de $y(t)$ et d'un nombre fini de ses dérivées (59) et (60).

- La sortie plate $y(t)$ s'exprime en fonction de l'état $x(t)$, la commande $u(t)$ et un nombre fini de ses dérivées (61). Cette relation s'appelle relation d'endogénéité, c'est à dire la sortie plate n'est construite qu'à partir des variables du système.

$$x(t) = \Phi(y(t),\, \dot{y}(t),\, \ddot{y}(t),\dots, y^{(r)}(t)) \tag{59}$$

$$u(t) = \Psi(y(t),\, \dot{y}(t),\, \ddot{y}(t),\dots, y^{(q)}(t)) \tag{60}$$

$$y(t) = h(x(t), u(t),\, \dot{u}(t), \ddot{u}(t),\dots, u^{(\gamma)}(t)) \tag{61}$$

Il est intéressant de remarquer les points suivants :

- Le nombre de sorties plates doit être égal au nombre de commande.
- La relation (59) permet de vérifier que $y(t)$ est effectivement une sortie plate.
- La relation (60) permet de mettre en place l'algorithme permettant de construire la commande à partir de $y(t)$ sans intégration d'équations différentielles.
- La structure de l'équation de l'état du système $\dot{x} = f(x,u)$, conduit à $q = r + 1$ dans la relation (60).
- Il n'y a pas d'unicité des sorties plates. Par exemple, si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont des sorties plates d'un système, alors $y(t) = y_1(t) + y_2^{(k)}(t)$ est aussi sortie plate du système pour tout entier $k > 0$. Comme le choix n'est pas unique, alors il faut choisir une sortie plate qui conduit aux calculs de planification et de bouclage les plus simples possibles.

3.2.1 Construction de la sortie plate

Dans le cadre de la planification de trajectoire par platitude en monovariable, le problème qui se pose est le suivant ; étant donné le modèle dynamique d'un système $\dot{x} = f(x,u)$, existe-t-il h tel que :

$$y(t) = h(x(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), ..., u^{(\gamma)}(t)) \tag{62}$$

avec $y(t)$ fonction régulière du temps supposée donnée et $x(t), u(t)$ fonctions régulières du temps supposées inconnues.

En pratique, déterminer si un système donné est plat reste un problème ouvert. Il n'existe pas de méthodes systématiques pour construire une sortie plate d'un système, même si les sorties plates sont généralement les sorties naturelles du système. La principale difficulté dans le calcul d'une sortie plate $y(t)$, réside dans sa dépendance par rapport aux dérivées en $u(t)$ d'ordre γ arbitrairement grand (62). Savoir si cet ordre γ admet une borne supérieure liée à l'ordre du système reste une difficulté (*Martin 1992*).

A titre d'exemple, le système (63) est plat car toutes les variables d'état et le vecteur de commande s'expriment en fonction de la sortie et de ses deux premières dérivées par rapport au temps (64).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad \text{avec la sortie } y = x_1 \tag{63}$$

$$x_1 = y\,;\; x_2 = \dot{y}\,;\;\; u = \dot{y} \tag{64}$$

En revanche, $y(t) = x_2(t)$ ne peut pas être considérée comme sortie plate, car dans ce cas $x_1(t)$ s'exprime en fonction de l'intégrale de $y(t)$:

$$x_1(t) = x_1(t_0) + \int_{t_0}^{t} y(\tau)\, d\tau$$

3.2.2 Planification de trajectoire

Il y a deux problèmes importants à distinguer dans le cadre de la génération de trajectoire par platitude. Dans un premier temps, le calcul de la trajectoire des variables d'état du système à partir de la sortie plate (59). Ensuite, dans un deuxième temps, le calcul de la commande d'anticipation (60) que nous allons voir également dans le cadre de l'action de compensation de la dynamique du système.

En effet, la platitude nous assure qu'il existe une sortie plate telle que toutes les variables du système puissent s'exprimer en fonction de cette sortie et d'un nombre fini de ses dérivées et que les équations différentielles du système sont identiquement vérifiées. Ainsi, au regard des relations (59) et (60), n'importe quelle fonction du temps $t \to y(t)$ fournit une trajectoire du système $t \to (x(t), u(t))$.

Dès lors, il suffit de calculer la trajectoire de cette sortie plate pour en déduire systématiquement la trajectoire des variables d'état. Il faut noter que n'importe quelle loi de mouvement, $t \to y(t)$, convient dès lors qu'elle est suffisamment dérivable et respecte les conditions initiales et finales (*Brun-Picard 2005*). Dans ce cas, on dit qu'il y a une correspondance *biunivoque* entre les trajectoires du système et celles des sorties plates (*Lévine 2004*).

Etant donnés l'instant initial t_i et les conditions initiales $x(t_i) = x_i$ et $u(t_i) = u_i$, et l'instant final t_f et les conditions finales $x(t_f) = x_f$ et $u(t_f) = u_f$, le problème de la planification de la trajectoire consiste à trouver une trajectoire $t \to (x(t), u(t))$ pour $t \in [t_i, t_f]$ qui vérifie $\dot{x} = f(x,u)$, ainsi que les conditions initiales et finales. Dans ce cas, il s'agit d'une planification sans contraintes. En revanche, lorsque des contraintes sont ajoutées sur la trajectoire cherchée, on parle de planification de trajectoires sous contraintes.

3.2.2.1 Planification de trajectoires sans contraintes

Dans un premier temps, nous allons présenter la planification de trajectoire sans contraintes. Supposons données les conditions initiales et finales sur $x(t)$ et $u(t)$ à $t_i = 0$ et t_f. Alors, les conditions initiales et finales sur $y(t)$ sont obtenues en utilisant la relation (62). Nous avons ainsi $2(r+2)$ conditions sur $y(t)$, telles que :

$$\begin{cases} x_0 = \Phi(y(0), \dot{y}(0), ..., y^{(r)}(0)) \\ x_T = \Phi(y(T), \dot{y}(T), ..., y^{(r)}(T)) \\ u_0 = \Psi(y(0), \dot{y}(0), ..., y^{(r+1)}(0)) \\ u_T = \Psi(y(T), \dot{y}(T), ..., y^{(r+1)}(T)) \end{cases}$$

A cet effet, l'interpolation polynômiale se prête bien à l'élaboration d'une loi de mouvement ayant les caractéristiques souhaitées. Ainsi, il suffit de définir un polynôme d'au moins $2(r+2)$ coefficients pour satisfaire les conditions initiales et finales :

$$y(t) = \sum_{k=0}^{2r+3} a_k \tau^k(t) \tag{65}$$

avec $T = t_f - t_i$; $\tau(t) = \dfrac{t - t_i}{T}$

Les coefficients a_k sont obtenus en égalant les dérivées successives de $y(t)$ (66) aux instants initiaux et finaux avec leurs valeurs données en ces deux instants.

$$y^{(k)}(t) = \frac{1}{T^k} \sum_{l=k}^{2r+3} \frac{l!}{(l-k)!} a_l \cdot \tau^{l-k}(t) \tag{66}$$

Ainsi à $t = t_i$, nous avons $\tau = 0$, on en déduit :

$$y^{(k)}(t_i) = \frac{k!}{T^k} a_k; \quad k = 0 \cdots r+1 \tag{67}$$

Cette relation permet de calculer directement les $(r+2)$ premiers coefficients.

Par ailleurs, à $t = t_f$ nous avons $\tau = 1$, donc :

$$y^{(k)}(t_f) = \frac{1}{T^k} \sum_{l=k}^{2r+3} \frac{l!}{(l-k)!} a_l; \quad k = 0, \cdots, r+1 \tag{68}$$

Alors, les *r+2* coefficients restants s'obtiennent en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r+2 & r+3 & \ldots & 2r+3 \\ (r+1)(r+2) & (r+2)(r+3) & \ldots & (2r+2)(2r+3) \\ (r+2)! & \dfrac{(r+3)!}{2} & \ldots & \dfrac{(2r+3)!}{(r+2)!} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{r+2} \\ \vdots \\ a_{2r+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t_f) - \displaystyle\sum_{l=0}^{r+1} \frac{T^l}{l!} y_j^{(l)}(t_i) \\ \vdots \\ T^k \left(y^{(k)}(t_f) - \displaystyle\sum_{l=k}^{r+1} \frac{T^{l-k}}{(l-k)!} y^{(l)}(t_i) \right) \\ \vdots \\ T^{r+1} \left(y^{(r+1)}(t_f) - y^{r+1}(t_i) \right) \end{pmatrix} \tag{69}$$

Dans le cadre de la commande des robots flexibles, nous allons examiner un cas très pertinent, qui est la planification de trajectoire dites « arrêt-arrêt » joignant deux points d'équilibre du système, en l'occurrence, un état de repos au démarrage et à l'arrivée.

En effet, si les points de départ $(x(t_i),u(t_i))$ et d'arrivée $(x(t_f),u(t_f))$ sont des points d'équilibre, alors $\dot{x}(t_i)=0;\quad \dot{u}(t_i)=0;\quad \dot{x}(t_f)=0;\quad \dot{u}(t_f)=0$, nous aurons alors :

$$\begin{cases} x(t_i)=\Phi(y(t_i),0,...,0) \\ x(t_f)=\Phi(y(t_f),0,...,0) \end{cases} \begin{cases} u(t_i)=\Psi(y(t_i),0,...,0) \\ u(t_f)=\Psi(y(t_f),0,...,0) \end{cases}$$

Or, d'après la relation (67), nous avons $a_0=y(t_i)$ et $a_k=0$ pour $k=1\cdots r+1$. alors :

$$y(t)=y(t_i)+\sum_{k=r+2}^{2r+3} a_k\tau^k(t)\,.$$

Finalement, en posant : $\alpha_k=\dfrac{a_{k+r+2}}{y(t_f)-y(t_i)}$, les trajectoires de type arrêt – arrêt seront de la forme :

$$y(t)=y(t_i)+(y(t_f)-y(t_i))\cdot\tau^{r+2}(t)\cdot\sum_{k=0}^{r+1}\alpha_k\tau^k(t) \qquad (70)$$

avec $\alpha_0,\cdots,\alpha_{r+1}$ solution de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r+2 & r+3 & \dots & 2r+3 \\ (r+1)(r+2) & (r+2)(r+3) & \dots & (2r+2)(2r+3) \\ (r+2)! & \dfrac{(r+3)!}{2} & \dots & \dfrac{(2r+3)!}{(r+2)!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, comme toutes les dérivées de $y(t)$ doivent être nulles à l'équilibre, on peut ajouter un nombre fini arbitraire de conditions initiales et finales nulles sur les dérivées d'ordre supérieur à $r+1$ sans changer les points d'équilibre de départ et d'arrivée. Ceci permettra d'augmenter la régularité de la trajectoire et ainsi rendre le démarrage et l'arrivée plus « calmes ».

3.2.2.2 Planification sous contraintes

Les trajectoires peuvent être planifiées avec des contraintes additionnelles, telles que :

- Des contraintes géométriques : la trajectoire de la sortie plate ne doit pas sortir d'un certain domaine de l'espace (obstacles, configuration,…)

- Des contraintes quantitatives (limitations en vitesse, limitations en tension, limitations en effort…)

Les contraintes géométriques imposent une trajectoire de la sortie plate qui ne doit pas sortir d'un certain domaine de l'espace. Il est clair que ce type de contraintes est récurrent dans le cadre des robots manipulateurs et particulièrement dans le cadre des robots médicaux souvent utilisés près du patient ainsi que du personnel soignant. D'où le besoin de définir des contraintes spatiales pour éviter tout risque de collision. Toutefois, cet aspect est plus pertinent dans le cadre de la génération de trajectoires. En réalité, pour le mode monoaxe, les contraintes géométriques se traduisent simplement par la donnée d'une borne minimale et maximale de la trajectoire.

Par ailleurs, nous pouvons rencontrer des contraintes quantitatives liées aux performances du système, telles que les limitations des couples des moteurs, des vitesses,…Il est important d'en tenir compte dès cette étape afin de minimiser les comportements indésirables comme les saturations qui peuvent dégrader la qualité de l'asservissement du mouvement.

Dans le cadre de la génération de trajectoires par platitude, la variable d'ajustement liée à cette contrainte est la durée de la trajectoire T . Il est évident que plus la trajectoire est lente moins les accélérations mises en jeu sont importantes et par conséquent les sollicitations au niveau des couples d'entrée. Dès lors, l'objectif sera de contraindre les dérivée de $y(t)$ par des bornes constantes $C_1,\cdots,C_k$, telles que :

$$\|\dot{y}\| \le C_1,\cdots,\left\|y^{(k)}\right\| \le C_k$$

Sachant que:

$$\dot{y} = \frac{1}{T}\frac{dy}{d\tau}(\tau(t)), \quad \ddot{y} = \frac{1}{T^2}\frac{d^2y}{d\tau^2}(\tau(t)),\ldots \quad y^{(k)} = \frac{1}{T^k}\frac{d^ky}{d\tau^k}(\tau(t))$$

où $\tau(t) = \dfrac{t-t_i}{t_f - t_i} = \dfrac{t-t_i}{T}$,

nous avons :

$$\left\|y^{(k)}(t)\right\| = \frac{1}{T^k}\left\|y^{(k)}(\tau)\right\| \Rightarrow C_k \ge \frac{1}{T^k}\left\|y^{(k)}(\tau)\right\| \Rightarrow T \ge \left(\frac{1}{C_k}\max_{\tau\in[0,1]}\left\|\frac{dy}{d\tau}\right\|\right)^{1/k}$$

En conclusion, il suffit alors de choisir la durée T , sachant que :

$$T = \max\left\{\left(\frac{1}{C_k}\max_{\tau\in[0,1]}\left\|\frac{d^ky}{d\tau^k}\right\|\right)^{1/k}\right\}; \quad k = 1,\cdots, r+1 \tag{71}$$

Par exemple, supposons que l'on veut assurer que $\|u\| \le u_{\max}$. On a :

$$\|u\| = \left\|\Psi(y, \dot{y}, \ddot{y}, ..., y^{(r+1)})\right\| = \left\|\Psi(y, \frac{1}{T}\frac{dy}{d\tau}, \cdots, \frac{1}{T^{r+1}}\frac{d^{r+1}y}{d\tau^{r+1}})\right\|$$

$$\Rightarrow \|u\| \le \|\Psi(y, 0, \cdots, 0)\| + \frac{1}{T}\left\|\frac{d\Psi}{d\dot{y}}\right\| \cdot \left\|\frac{dy}{d\tau}\right\| + \cdots + \frac{1}{T^{r+1}}\left\|\frac{d\Psi}{dy^{(r+1)}}\right\| \cdot \left\|\frac{d^{r+1}y}{d\tau^{r+1}}\right\|$$

$$\Rightarrow \|u\| \le \|\Psi(y, 0, \cdots, 0)\| + \left\|\frac{d\Psi}{d\dot{y}}\right\| C_1 + \cdots + \left\|\frac{d\Psi}{dy^{(r+1)}}\right\| C_{r+1} \le u_{\max}$$

Ce qui permet de choisir les constantes $C_1, \cdots, C_k$ en fonction de $u_{\max}$, ensuite, T via la relation (71).

3.2.3 Application sur l'axe Pivot du Robot Innova

Tout d'abord, il faudrait définir la sortie plate du système. Naturellement, nous pouvons prendre $y(t) = \theta(t)$.

Pour vérifier que $y(t)$ est bien une sortie plate, il suffit d'exprimer les variables d'état ainsi que la commande en fonction de celle-ci. En effet, nous avons :

$$\begin{cases} x_1 = \dot{\theta} = \dot{y} \\ x_2 = \dot{\theta}_m = \dot{x}_4 = \dfrac{J_{PVT}}{k} \cdot y^{(3)} + \dfrac{d}{k}\ddot{y} + \dot{y} \\ x_3 = \theta = y \\ x_4 = \theta_m = \dfrac{J_{PVT}}{k} \cdot \ddot{y} + \dfrac{d}{k}\dot{y} + y \end{cases} \tag{72}$$

Par ailleurs, nous avons : $J_m\ddot{\theta}_m + f_v\dot{\theta}_m + k(\theta_m - \theta) = \Gamma_m$. Donc :

$$\begin{aligned} \Gamma_m = J_m \cdot \left(\frac{J_{PVT}}{k} \cdot y^{(4)} + \frac{d}{k} y^{(3)} + \ddot{y}\right) + f_v \cdot \left(\frac{J_{PVT}}{k} \cdot y^{(3)} + \frac{d}{k}\ddot{y} + \dot{y}\right) \\ + k\left(\frac{J_{PVT}}{k} \cdot \ddot{y} + \frac{d}{k}\dot{y}\right) \end{aligned} \tag{73}$$

On peut ainsi vérifier que $y(t) = \theta(t)$ est bien une sortie plate du système car toutes les variables d'état ainsi que la commande s'expriment en fonction de $y(t)$ et de ses dérivées (72).

Maintenant, il s'agit de générer la trajectoire à partir des consignes de vitesse demandées par le médecin via la manette de commande. Il s'agit d'un profil arbitraire (Figure 85) où seules sont connues les conditions initiales et la consigne de vitesse. Ce qui ajoute une complexité à la génération de trajectoire. De ce fait, le générateur de trajectoire doit prendre en compte la variation de la vitesse de consigne même avant la fin de la trajectoire.

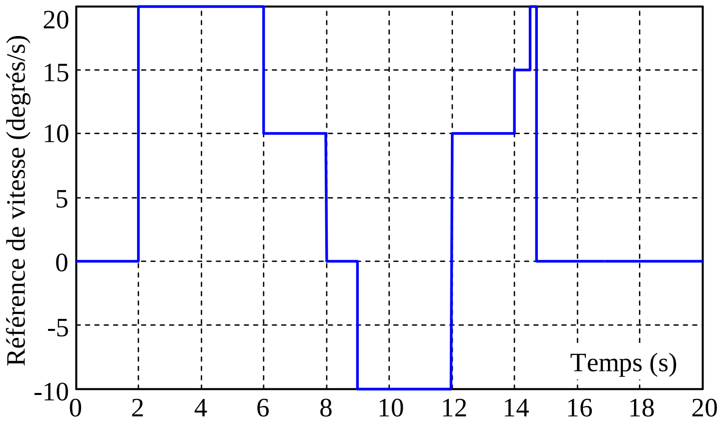


Figure 85: Consigne de vitesse

En outre, la trajectoire générée doit garantir les éléments suivants du cahier des charges :

- Accélération maximale inférieure à $a_{\max} = 227° \cdot s^{-2}$
- Arrêt sans vibrations
- Ne pas exciter les modes propres de l'axe

Quantitativement, nous pouvons reformuler ces conditions en contraintes sur la sortie plate $y(t)$, telles que :

Conditions initiales	Conditions Finales
$y(t_{init}) = P_{init}$	
$\dot{y}(t_{init}) = V_{init}$	$\dot{y}(t_f) = V_{ref}$
$\ddot{y}(t_{init}) = A_{init}$	$\ddot{y}(t_f) = 0$

La contrainte sur l'accélération se traduit par : $\|\ddot{y}(t)\| \leq A_{\max}$.

Par ailleurs, l'approche de platitude permet d'imposer par construction la dynamique souhaitée aux variables d'état du système. En conséquence, la dernière contrainte est naturellement vérifiée pour les modes propres modélisés.

En outre, pour augmenter la régularité de la trajectoire, et éviter d'exciter les modes oscillants mal modélisés nous pouvons également imposer :

$y^{(3)}(t_i) = \tilde{A}_{init}$	$y^{(3)}(t_f) = 0$
$y^{(4)}(t_i) = \hat{A}_{init}$	$y^{(4)}(t_f) = 0$

Ceci permettra de garantir la continuité de l'accélération de l'arbre moteur $\ddot{\theta}_m$ (72) et de la commande Γ_m (73).

Dans le cadre de cette étude, nous allons comparer deux cas de figure :

- Trajectoire avec contraintes supplémentaires sur $y^{(3)}(t)$, ce qui se résume en 7 conditions en tout. Il faut choisir en conséquence un polynôme de degré 6.

- Trajectoire avec contraintes supplémentaires sur $y^{(3)}(t)$ et $y^{(4)}(t)$, ce qui se résume en 9 conditions en tout. Il convient de choisir un polynôme de degré 8.

La première trajectoire sera définie, telle que :

$$y(t) = a_0 + a_1\sigma + ... + a_6\sigma^6 \tag{74}$$

avec $\sigma = (t - t_i)/T$.

En posant $t_i = 0$, la résolution du système d'équations (67) et (69) conduit aux relations suivantes :

$a_0 = P_{init}$	$a_1 = V_{init} \cdot T$	$a_2 = \frac{1}{2} A_{init} \cdot T^2$	$a_3 = \frac{1}{6} \tilde{A}_{init} \cdot T^3$
$a_4 = \frac{5}{2}(V_{ref} - V_{init}) \cdot T - \frac{3}{2} A_{init} \cdot T^2 - \frac{3}{8} \tilde{A}_{init} \cdot T^3$			
$a_5 = 3 \cdot (V_{init} - V_{ref}) \cdot T + \frac{8}{5} A_{init} \cdot T^2 + \frac{3}{10} \tilde{A}_{init} \cdot T^3$			
$a_6 = (V_{ref} - V_{init}) \cdot T - \frac{1}{2} A_{init} \cdot T^2 - \frac{1}{12} \tilde{A}_{init} \cdot T^3$			

La deuxième trajectoire sera définie, telle que :

$$y(t) = a_0 + a_1\sigma + ... + a_8\sigma^8 \tag{75}$$

En posant $t_i = 0$, la résolution du système d'équations (67) et (69) conduit aux relations suivantes :

$a_0 = P_{init}$	$a_1 = V_{init} \cdot T$	$a_2 = \frac{1}{2} A_{init} \cdot T^2$	$a_3 = \frac{1}{6} \tilde{A}_{init} \cdot T^3$	$a_4 = \frac{1}{24} \hat{A}_{init} \cdot T^4$
$a_5 = 7 \cdot (V_{ref} - V_{init}) \cdot T - 4 \cdot A_{init} \cdot T^2 - \tilde{A}_{init} \cdot T^3 - \frac{2}{15} \hat{A}_{init} \cdot T^4$				
$a_6 = 14 \cdot (V_{ref} - V_{init}) \cdot T - \frac{15}{2} A_{init} \cdot T^2 + \frac{5}{3} \tilde{A}_{init} \cdot T^3 + \frac{1}{6} \hat{A}_{init} \cdot T^4$				
$a_7 = 10 \cdot (V_{ref} - V_{init}) \cdot T - \frac{36}{7} A_{init} \cdot T^2 - \frac{15}{14} \tilde{A}_{init} \cdot T^3 - \frac{2}{21} \hat{A}_{init} \cdot T^4$				

$$a_8 = \frac{5}{2} \cdot (V_{ref} - V_{init}) \cdot T + \frac{5}{4} A_{init} \cdot T^2 + \frac{1}{4} \tilde{A}_{init} \cdot T^3 + \frac{1}{48} \hat{A}_{init} \cdot T^4$$

Les trajectoires ainsi obtenues respectent toutes les conditions initiales et finales. De plus, la condition $\|\ddot{y}(t)\| \leq a_{\max}$ est vérifiée en prenant $T = 0{,}2\ s$. La figure 86 montre la génération de la trajectoire plate (74) à partir d'un profil manuel de consigne en vitesse.

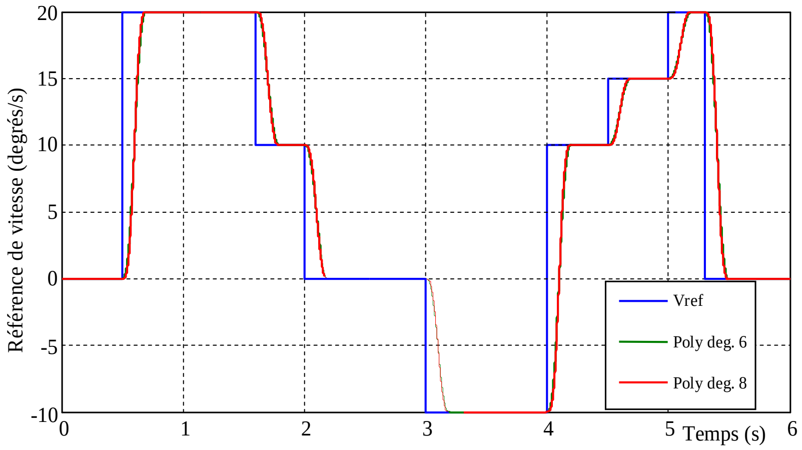


Figure 86: Génération de la trajectoire plate

A partir de la trajectoire plate $y(t)$, nous pouvons générer les trajectoires de référence de toutes les variables d'état du système(Figure 87) en utilisant les relations (72).

Nous notons que les trajectoires plates obtenues (Figure 86) sont assez similaires dans les deux cas, à savoir, le polynôme de degré six et le polynôme de degré huit. Cependant, le polynôme de degré huit permet d'assurer la continuité de l'accélération de la position angulaire de l'arbre moteur θ_m et une meilleure régularité de la trajectoire (Figure 88, Figure 89).

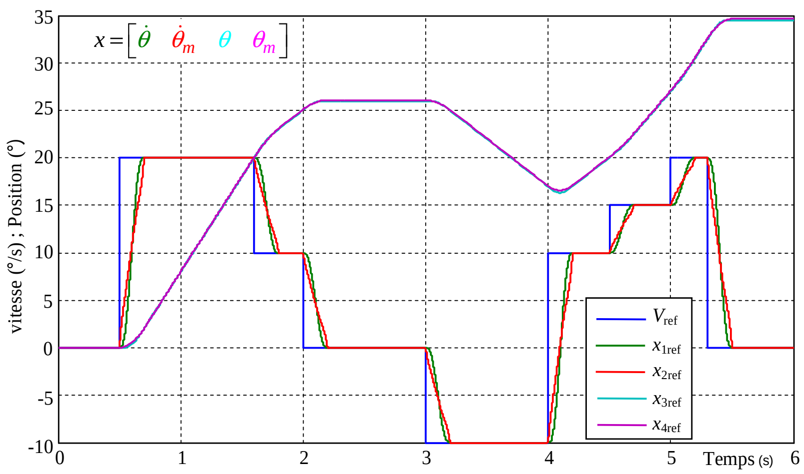


Figure 87: Trajectoire de référence de l'axe Pivot

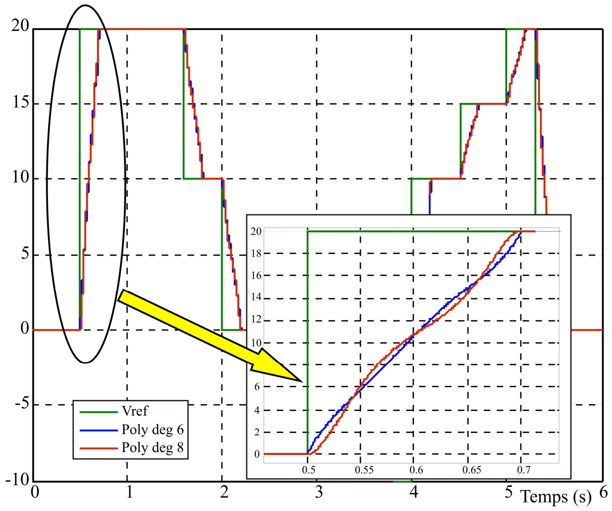


Figure 88: Génération de $\dot{\theta}_m$ en fonction de la trajectoire plate $y(t)$

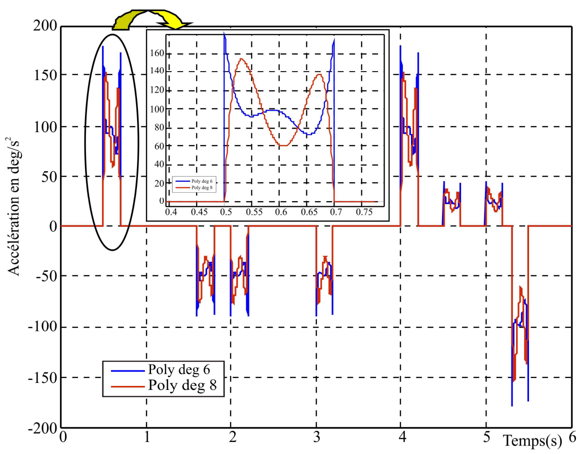


Figure 89: Accélération de l'axe Pivot $\ddot{\theta}_m$ en fonction de la trajectoire plate $y(t)$

3.3 Technique de freinage en deux temps

Il faut noter que, dans la plupart des cas la vibration de la structure du robot et en particulier de la chaîne image provient de l'action de freinage. En effet, les vibrations résiduelles, après l'arrêt du système, impactent directement la cadence de prise des images RX. Le critère de démarrage de l'acquisition d'images est que l'amplitude de la vibration devienne inférieure à 0,02 mm (Figure 80).

Dans l'objectif de minimiser la durée des vibrations résiduelles, nous avons développé un profil de freinage en deux temps *(Al Assad, Martinez Ferreira et al. 2009)* inspiré de la technique « Input Shaping » (*Pao 1999*). Cette approche est basée sur le fait que les vibrations introduites par une impulsion peuvent être éliminées par une deuxième impulsion appliquée avec un décalage temporel par rapport à la première impulsion (Figure 90).

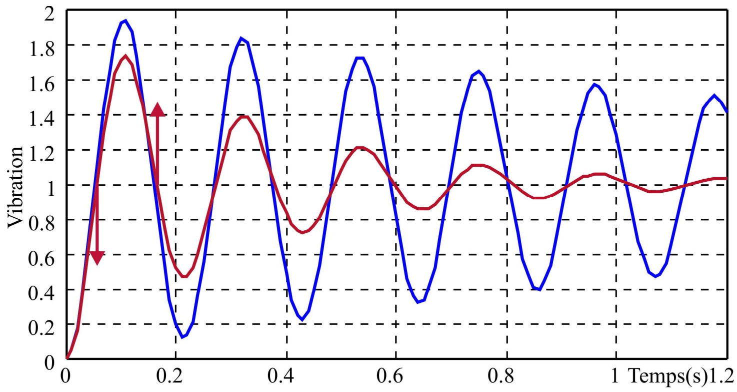


Figure 90: Principe de la technique « Input Shaping »

Physiquement, la vibration est maintenue grâce à l'énergie potentielle conservative emmagasinée dans l'élasticité de l'articulation. Elle est directement liée à la raideur de l’articulation. En effet, la force de rappel crée par cette énergie est donnée par:

$$\Gamma_p = k \cdot (\theta - \theta_m) \tag{76}$$

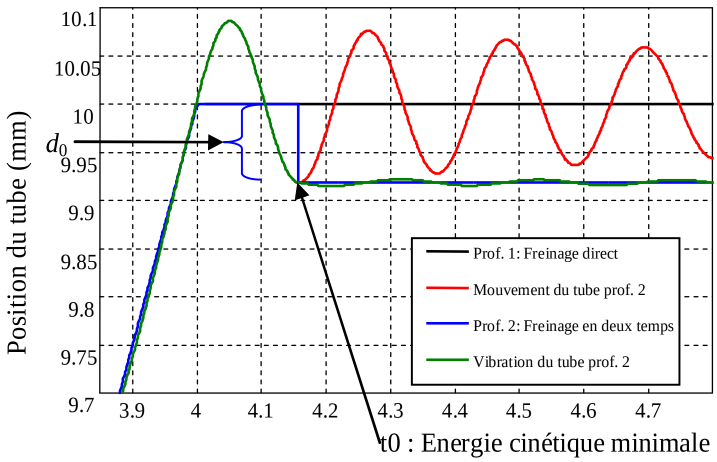


Figure 91: Réponse de l'axe Pivot au profil de freinage en deux temps

Cette force de rappel est minimale si l'écart entre θ et θ_m est minimisé (Figure 91). En partant de ce principe, nous avons envisagé deux scénarii de freinage. Le premier étant un arrêt sur une distance inférieure à la distance de freinage puis un mouvement vers l'avant (Figure 92-gauche). Le deuxième étant un arrêt avec un dépassement suivi d'un mouvement inverse (Figure 92-droite).

D'un point de vue pratique, le premier profil n’est pas très intéressant car il implique une forte accélération ce qui peut exciter d’une manière plus importante les modes mal modélisés et qui ne sont pas pris en compte lors de l’optimisation du profil de freinage. Dès lors, l’attention de l’étude va être portée sur le deuxième profil uniquement.

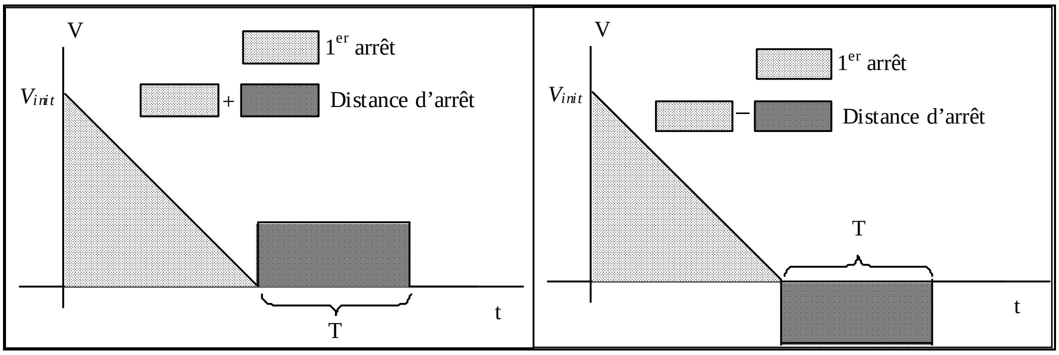


Figure 92: Profil d'arrêt en deux temps

Par ailleurs, le profil du mouvement inverse « la seconde action » doit tenir compte de l'accélération maximale de l'axe pivot. Auquel cas, le profil de freinage réalisable aura comme forme :

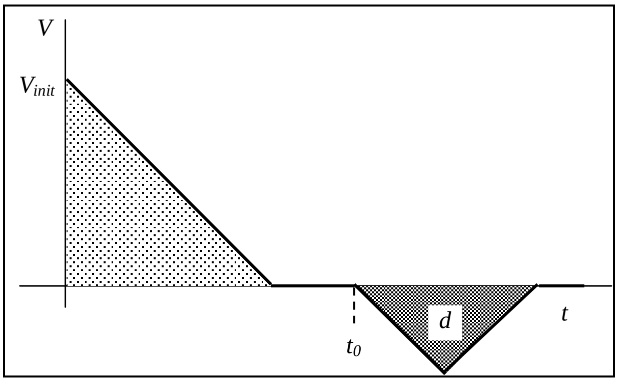


Figure 93: Paramètre d'optimisation du profil de freinage en deux étapes

Ce profil peut être optimisé par rapport aux paramètres t_0 et d_0 (Figure 91, Figure 93) afin d'obtenir la plus faible vibration résiduelle. La figure 94 montre le résultat optimal, obtenu avec : $t_0 = 0{,}1\,s$ et $d_0 = 4{,}5$ mm .

La figure 95 montre la validation expérimentale du profil de freinage en deux temps sur l'axe Pivot du robot Innova. L'axe a été freiné en 10 mm à partir d'une vitesse initiale $V_{init} = 20°/s$. Le critère de comparaison a été ramené à la vibration des pixels en millimètres sur l'image acquise. Les résultats obtenus sont probants, ils montrent que dès le deuxième pic l'amplitude de la vibration résiduelle est réduite sensiblement permettant ainsi d'avoir une image nette plus rapidement.

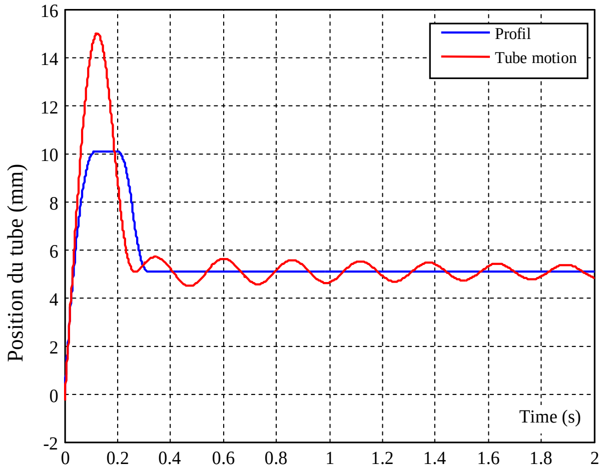


Figure 94: Vibration résiduelle du tube avec le profil de freinage optimal

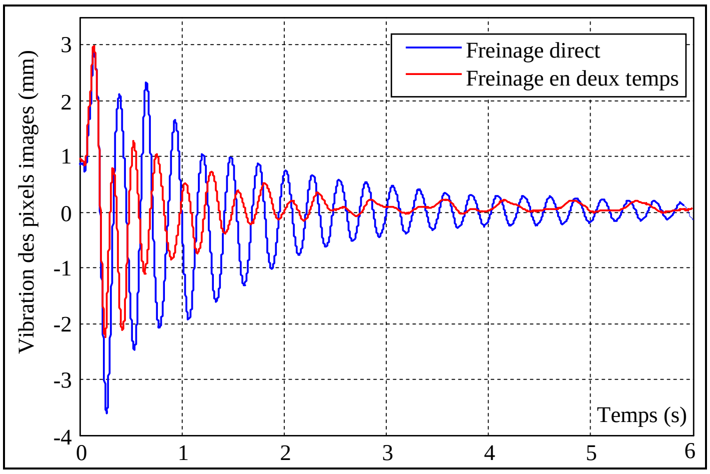


Figure 95: Validation expérimentale du profil de freinage en deux temps

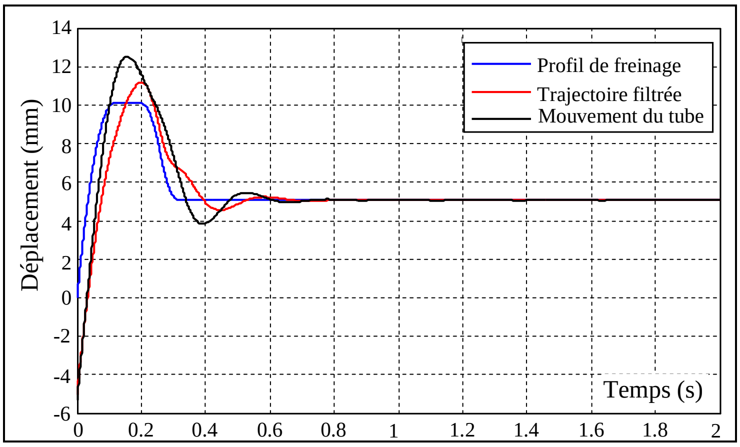


Figure 96: Filtrage du profil de freinage

Nous avons pu également améliorer ce résultat en filtrant le profil de freinage par un filtre coupe bande afin de rejeter la fréquence du mode propre du système. Les résultats en simulation (Figure 96) montrent un comportement quasi sans vibrations résiduelles grâce à l'ajout de ce filtre.

En outre, l'utilisation combinée de l'approche de freinage en deux temps avec le filtre coupe bande, rejetant la fréquence du mode propre, améliore la robustesse du système face aux incertitudes paramétriques sur ω_0 et ξ_0 grâce à l'action du freinage en deux temps. La figure 97 montre le niveau des vibrations résiduelles face à la variation des paramètres du modèle. Cette étude réalisée sur le modèle du robot Agility montre, d'une part, les bonnes performances dans le cas nominal à 3.8 Hz avec un filtrage par un filtre coupe-bande. D'autre part, l'amélioration de la robustesse en intégrant le freinage en deux temps.

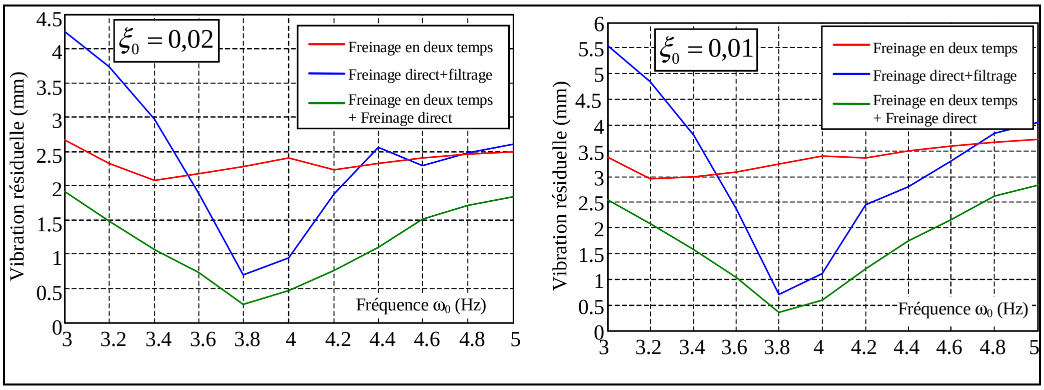


Figure 97: Robustesse de l'approche de freinage en deux temps aux incertitudes paramétriques sur ω_0 et ξ_0, simulation freinage en 10 mm à partir de $V_{init} = 20°/s$

4 Les méthodes d'anticipation

La connaissance du modèle dynamique du système à commander permet d'envisager une action d'anticipation dans laquelle une commande, de type boucle ouverte, est calculée en se basant uniquement sur les objectifs de l'asservissement. Cette approche permet d'améliorer sensiblement la qualité de la boucle d'asservissement, car le correcteur n'aura plus comme rôle de faire converger le système vers la trajectoire de référence mais uniquement de garantir la poursuite de celle-ci. Auquel cas, la bande passante du régulateur pourra être baissée ce qui augmentera en conséquence ses marges de stabilité.

Autrement dit, les performances de l'asservissement seront atteintes grâce à l'action de l'anticipation. Le correcteur, quant à lui, permettra de contrer les perturbations ainsi que les erreurs de modélisation.

4.1 Compensation du couple de charge

Lorsque les effets de la gravité ne sont pas compensés par construction mécanique, il convient d'intégrer cette compensation via l'action d'anticipation (77). Cette première approche est très intéressante car d'un point de vue pratique, elle est très simple à mettre en œuvre et ne requiert pas un volume de calculs important.

$$\Gamma_a(\mathbf{q}) = \eta_l \cdot Q_i(\mathbf{q}) \tag{77}$$

Idéalement, il est plus rigoureux de calculer la compensation à partir de la position réelle de l'axe en mouvement. Toutefois, en pratique, nous préconisons de calculer celle-ci uniquement à partir de la position désirée. Cela est justifié pour plusieurs raisons :

– L'approximation du couple de charge au premier ordre est linéaire par rapport à q. En effet, d'après la relation (78) on a $Q(q) \approx Q_0 + Q'(q_0)\delta q$. Ainsi l'erreur de poursuite de trajectoire a un impact faible sur le couple de charge.

– Les bruits de mesure ne seront pas réinjectés dans le calcul du couple d'anticipation et donc le courant de consigne sera plus régulier.

Dans le cadre de la commande de l'axe Pivot du Robot Innova, le couple de charge est donné par la relation :

$$Q_2(q) = -g \cdot (\cos(\theta_2) \cdot MX(q) + \sin(\theta_2) \cdot MY(q)) \quad (78)$$

avec:

– $MX(q) = MY_2 + MY_4 + MZ_3$

– $MY(q) = MX_2 - \sin(\theta_3) \cdot (MX_3 + MX_4) + \cos(\theta_3) \cdot (-MY_3 + MZ_4 + (R + r_4) \cdot M_4)$

L'expression du couple, ainsi obtenue, a deux paramètres dépendant de la configuration du robot, à savoir, la position du Carc (θ_3) et de l'ascenseur (r_4). Cette dernière pourra être simplifiée pour le calcul en ligne par la relation :

$$\Gamma_l(\theta) = \Gamma_{l0} \cdot \cos(\theta - \phi) \quad (79)$$

où $\Gamma_{l0} = -g \cdot \sqrt{MX^2 + MY^2}$ est l'amplitude du couple de charge

$\phi = \arctan(MY/MX)$, le décalage entre l'axe passant par le centre de gravité et l'angle réel de l'axe (Chapitre II- figure 34).

4.2 *Compensation de la dynamique du mouvement rigide*

Une étape plus avancée dans le cadre du calcul de l'action d'anticipation consiste à prendre en compte la dynamique du mouvement ainsi que les forces de frottements (*Khalil et Dombre 1999*). Ainsi, la commande d'anticipation aura comme forme :

$$\Gamma_a(\ddot{q}, \dot{q}, q) = J \cdot \ddot{q}_i + f_v \cdot \dot{q}_i + \eta_l \cdot Q_i(q) \quad (80)$$

En considérant le modèle rigide de l'axe Pivot, nous obtenons :

$$\Gamma_a(\ddot{\theta}, \dot{\theta}, \theta) = (J_m + J_{PVT}) \cdot \ddot{\theta} + f_v \cdot \dot{\theta} + \mathrm{sgn}(\dot{\theta}) \cdot f_s + \eta_l \cdot Q_i(\theta) \quad (81)$$

Il faut noter que le moment d'inertie J_{PVT} dépend de la configuration du robot i.e. θ_3 et r_4. En effet, nous avons:

$$J_{PVT} = ZZ_2 + \cos(\theta_3)^2 \cdot (XX_3 + XX_4 + 2 \cdot MZ_4 \cdot (R + r_4) + M_4 \cdot (R + r_4)^2) \\ + \sin(\theta_3)^2 \cdot (YY_3 + ZZ_4) + 2 \cdot CS(\theta_3) \cdot (XY_3 + XZ_4 - MX_4 \cdot (R + r_4)) \quad (82)$$

4.3 Compensation de la dynamique des flexibilités

Dans un cadre plus étendu, nous pouvons considérer la compensation de la dynamique liée à la flexibilité du système en utilisant l'approche de platitude. En effet, nous avons vu précédemment que cette approche permet d'élaborer une commande en boucle ouverte qui permet d'imposer la dynamique souhaitée au système à partir d'un modèle de connaissances préalablement établi. Si le système est plat, cette commande d'anticipation pourra être calculée à partir de la trajectoire plate en utilisant la relation (60). Pour l'axe Pivot, cette commande sera donnée par:

$$\Gamma_{platitude} = \frac{J_m \cdot J_{PVT}}{k} \cdot y^{(4)} + \frac{J_m \cdot d + J_{PVT} \cdot f_v}{k} y^{(3)} + \left(J_m + \frac{f_v \cdot d}{k} + J_{PVT} \right) \cdot \ddot{y} \\ + (f_v + d) \cdot \dot{y} \quad (83)$$

La figure 98 montre la commande calculée pour le profil de référence en vitesse en prenant les deux trajectoires de la sortie plate $y(t)$ établies dans la section précédente.

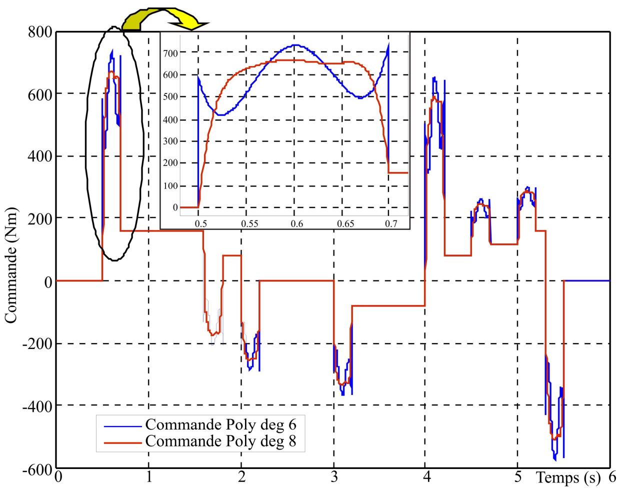


Figure 98: Commande plate, axe Pivot du robot Innova

Enfin, l'action d'anticipation globale sera définie en intégrant à la fois la compensation de la charge statique et la dynamique des flexibilités, telles que :

$$\Gamma_a = \Gamma_{platitude} + \text{sgn}(\dot{\theta}) \cdot f_s + \eta_l \cdot Q_i(\theta) \quad (84)$$

5 Conception du correcteur

Nous avons pu voir jusqu'à présent la méthodologie de conception de la loi de commande de mouvement via l'étape de génération de la trajectoire ainsi que l'action d'anticipation. Ces dernières permettent de commander le système de manière optimale en se basant sur la connaissance du modèle et les objectifs de commande. Toutefois, la présence de perturbations ainsi que les erreurs de modélisation rendent restrictive voire impossible la commande du système uniquement via ces deux actions. Dès lors, une action corrective permettant de garantir la poursuite de la trajectoire désirée est nécessaire. Celle-ci se base sur l'asservissement du système par rapport à son état réel obtenu directement via les capteurs de position et de vitesse ou indirectement via des techniques d'estimation pour les grandeurs non mesurées.

Dans un premier temps, nous allons analyser la boucle de régulation en cascade implémentée actuellement pour la commande de l'axe Pivot. Dans un second lieu, nous étendrons l'étude à d'autres techniques de conception de correcteurs adaptées au cas monovariable.

5.1 La régulation cascade

La régulation en cascade est une approche basée sur l'utilisation de plusieurs correcteurs (PI généralement dans le cas des commandes d'axe) connectés sous forme de boucles imbriquées (Figure 82) (*Godoy 2007*; *Love 2007*). C'est une structure de commande très utilisée dans la commande d'axe. Bien que très connu, son réglage dans le cas du robot Innova est présenté dans ce mémoire car elle constitue notre référence en termes de performances nominales. En effet, une telle structure se prête bien à la commande de systèmes constitués de deux ou plusieurs sous-systèmes en série ayant des dynamiques disjointes. Aussi, elle sert aussi de référence pour l'analyse des performances d'autres structures de commande.

Dans le cas de la structure cascade le réglage des boucles, quand les dynamiques sont disjointes, peut se faire en partant de la première boucle interne jusqu'à la boucle externe en faisant abstraction, dans chaque étape, de la couche supérieure et en approchant la boucle interne par un simple gain. L'intérêt principal de cette approche est de permettre une compensation rapide des perturbations qui affectent la boucle interne. De même, elle permet d'améliorer le temps de réponse de la boucle externe et par conséquence son rejet des perturbations dans la mesure où des gains plus élevés peuvent être utilisés sans affecter la stabilité de la boucle interne (*Flaus 1994*). Ceci dit, le noyau principal de cette topologie est le régulateur PID, pour plus de détails sur les propriétés structurelles et des méthodes de réglage de ce dernier, le lecteur pourra se référer à (*Ogata 1997; Godoy et Ostertag 2003*).

Les systèmes électromécaniques rentrent dans ce cadre précis, car en général ils sont constitués d'un sous-système électrique de dynamique rapide qui pilote en série un sous-système mécanique de dynamique lente (Figure 99). Le régulateur du robot Innova est basé sur cette approche. En effet, il comprend une première boucle interne pour l'asservissement de courant échantillonnée à $T_e = 200\ \mu s$, complétée par une boucle de vitesse et une boucle de position échantillonnées à $T_e = 1\ ms$ (Figure 82).

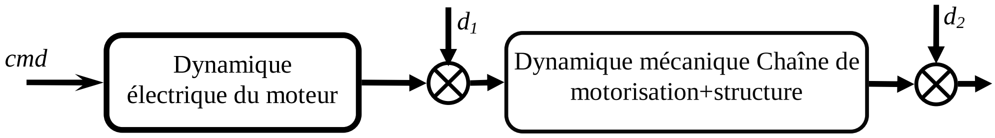


Figure 99: Les sous-systèmes d'un système électromécanique

5.1.1 Réglage de la boucle de courant

Au regard des bandes passantes mises en jeu, le réglage de la boucle de courant peut se faire indépendamment de la configuration mécanique du système. En réalité, l'analyse de la réponse fréquentielle (Figure 101) confirme l'indépendance, en hautes fréquences, de la boucle de courant vis-à-vis de la configuration mécanique du système. Le régulateur PI a comme forme:

$$R(p) = K_{p\_i}\left(1 + \frac{1}{T_{i\_i}p}\right) \tag{85}$$

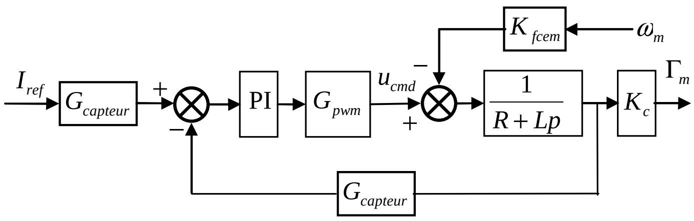


Figure 100: Boucle de régulation du courant

Le réglage peut être effectué d'une manière « classique » à partir des méthodes fréquentielles par le choix d'une bande passante adaptée :

- T_{i_i} est liée à la fréquence de coupure souhaitée $\omega_c = 1/T_{i\_i} = 1000\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ donc $T_{i\_i} = 1\ ms$.
- K_{p_i} est déduit à partir de la réponse fréquentielle (Figure 101) pour ajuster la fréquence de coupure à ω_c. Soit ici $K_{p\_i} = 30\ dB = 31{,}62$.

L'implémentation discrète de la commande de la boucle de courant a été effectuée avec une période d'échantillonnage $T_e = 200\ \mu s$.

La boucle de courant étant réglée, elle sera par la suite approchée par un simple gain, au vu de la structure de commande de la boucle externe (Figure 102). En conséquence, lors de la conception du régulateur de la boucle de vitesse et de position pour l'approche en cascade ainsi que pour la commande par retour d'état et la synthèse H_∞, il sera supposé que l’entrée du système est directement le couple sur l'arbre du moteur.

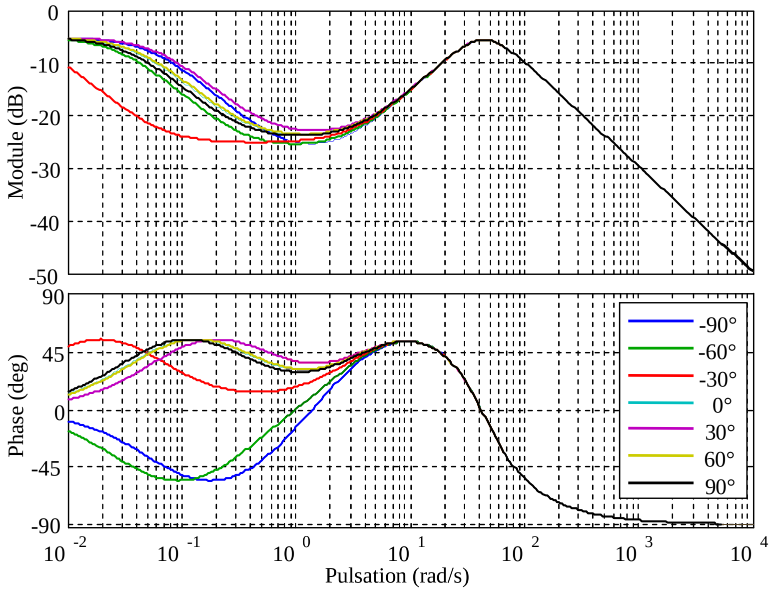


Figure 101 : Diagrammes de Bode de la fonction de transfert Γ_m / u_{cmd} en fonction de $\theta_{Pivot0} \in [-90° ; +90°]$, $\theta_{Carc} = 90°$

5.1.2 Réglage de la boucle de vitesse

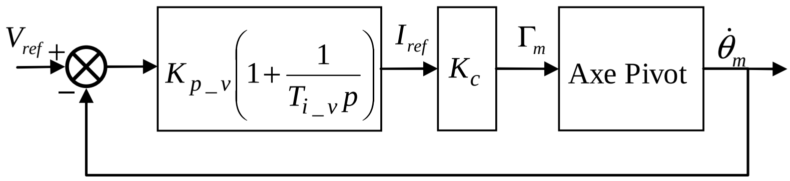


Figure 102: Boucle de vitesse, approximation de la boucle de courant

La même approche fréquentielle pourra être utilisée pour le réglage du correcteur PI de la boucle de vitesse (Figure 102) :

– on considère comme entrée le couple sur l’axe du pivot Γ_{Pivot}, celui-ci se déduisant du couple moteur (proportionnel au courant de consigne) par le gain du rapport de réduction.

– la pulsation de coupure souhaitée permet de régler T_{i_v}, dans le cas de l’axe du robot Innova on peut choisir $\omega_c = 1/T_{i\_v} = 300\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

– K_{p_v} se déduit de la réponse fréquentielle (Figure 103) pour ajuster la fréquence de coupure à ω_c, $K_{p\_v} = 95\,\text{dB} = 56234$.

Enfin la boucle de vitesse est complétée par la boucle externe sur la position de l'arbre moteur, un régulateur proportionnel seul étant suffisant dans ce cas : $K_{p\_\theta} = 30 \text{ dB} = 30$.

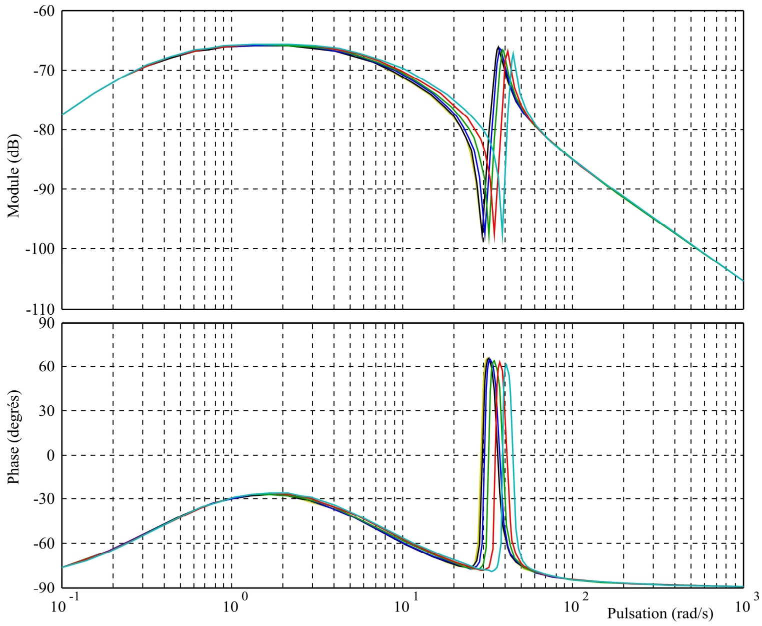


Figure 103: Diagrammes de Bode de la fonction de transfert $\dot{\theta}_m / \Gamma_{Pivot}$ en fonction de $\theta_{Carc} \in [-45° ; +45°]$, $\theta_{Pivot0} = 0°$

5.2 *Régulation par retour d'état et observateur*

Dans cette partie, nous allons étudier l'application de la commande par retour d'état en utilisant l'approche de placement de pôles ainsi que l'approche de commande optimale appelée également commande Linéaire Quadratique (LQ) (*Alazard, Cumer et al. 1999; De Larminat 2002*). Le calcul de la commande est, quant à lui, fondé sur l'erreur de poursuite des trajectoires de toutes les variables d'état du système. Or, comme nous l'avons vu sur les axes du robot Innova, seules les mesures de la position θ_m et de la vitesse $\dot{\theta}_m$ de l'arbre moteur sont disponibles. Dès lors, l'utilisation d'un observateur afin de reconstruire les variables manquantes, à savoir la position θ et la vitesse $\dot{\theta}$ de la charge, sera nécessaire.

Par ailleurs, afin d'améliorer le rejet des erreurs statiques une action intégrale sur l'écart de consigne complétera le vecteur d'état. Dans ce cadre, la loi de commande sera donnée par (86).

$$\Gamma_m = \Gamma_a + K \cdot (X_{Iref} - X_I) \tag{86}$$

avec Γ_a la commande en boucle ouverte (action d'anticipation), K le vecteur des gains du retour d'état et $X_I = \left[\dot{\theta} \quad \dot{\theta}_m \quad \theta \quad \theta_m \quad \int(\theta_m - \theta_{ref})\right]^T$.

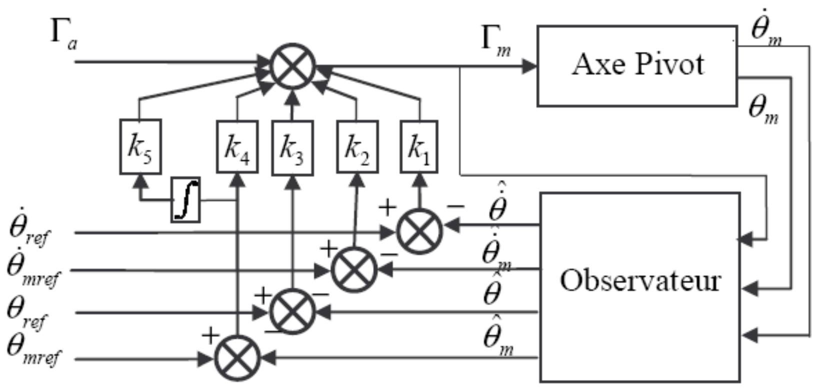


Figure 104: Commande par retour d'état

Les propriétés structurelles de la commande par retour d'état et observateur assurent l'indépendance de la dynamique de la commande et celle de l'estimateur (*De Larminat 2002*). En effet, le résultat bien connu (théorème de séparation) permet d'affirmer que l'utilisation d'un observateur ne modifie pas les valeurs propres du système commandé, mais seulement lui associe les nouvelles valeurs propres de l'observateur. Ce résultat permet de traiter séparément le problème de synthèse de la commande et celui de l'observateur.

5.2.1 Calcul du gain du retour d'état

Compte tenu de la loi de commande élaborée précédemment, le système bouclé sera :

$$\dot{X}_I = \left(\begin{bmatrix} A & \mathbf{0}_{4\times1} \\ 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \cdot K \right) \cdot X_I + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\Gamma_a + K \cdot X_{Iref} \right) \qquad (87)$$

Dans le cas du robot Innova deux types de synthèse ont été évalués : la commande modale et la synthèse LQ.

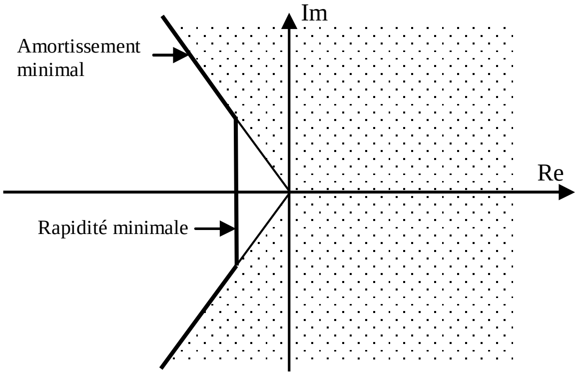


Figure 105: Zone de performance par rapport aux pôles du système

Pour obtenir une dynamique de rejet de perturbation à $200\,\text{ms}$, nous pouvons envisager un placement de pôles pour des pulsations de l'ordre de $\omega_c = 2\pi/0{,}2 = 31{,}4\ \text{rad/s}$ (Figure 105). Le choix suivant a été effectué :

$$p_{1,2} = -30 \pm i \cdot 35\,;\ p_{3,4,5} \approx -30$$

Les gains du retour d'état ainsi obtenus sont :

$$K = [42 \quad 27 \quad 57 \quad 1765 \quad 15094] \cdot 10^3$$

On peut noter que les pôles choisis en boucle fermée sont assez proches de ceux du modèle en boucle ouverte dont les emplacements polaires sont rappelés dans la figure 106.

Le calcul de K pourra être vu sous un angle différent en considérant un compromis entre les performances souhaitées et les limitations des actionneurs du système. Ainsi, la synthèse de la commande est basée sur l'optimisation d'un critère linéaire quadratique (88) qui permet de déterminer la commande optimale du système.

$$J = \int_0^{\infty} \left(x(t)^T \cdot Q \cdot x(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t) \right) dt \qquad (88)$$

avec $Q = H^T H = \text{diag}[q_1\ q_2\ q_3\ q_4\ q_5]$ et $R = \lambda$ les matrices de pondération du critère.

En prenant comme matrices de pondération du critère LQ :

$$Q = \text{diag}[1 \quad 1 \quad 10^3 \quad 10^3 \quad 10^5] \text{ et } R = 10^{-10}$$

Les gains de retour d'état obtenus sont :

$$K = [136 \quad 110 \quad -529 \quad 6500 \quad 31600] \cdot 10^3$$

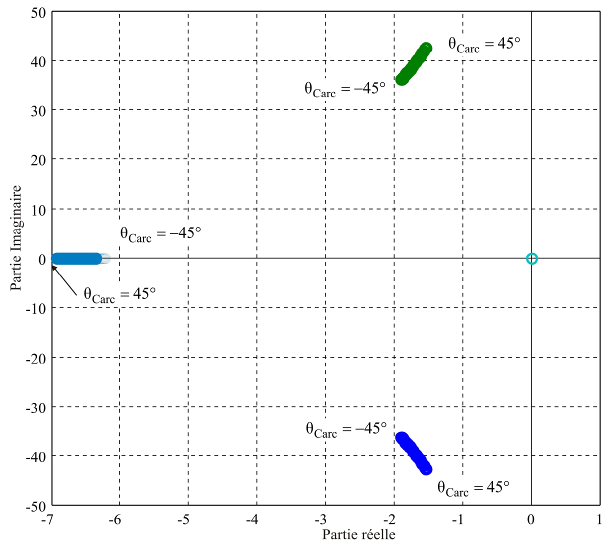


Figure 106 : Evolution des pôles de la fonction de transfert θ_m/Γ_{Pivot} en fonction de θ_{Carc}

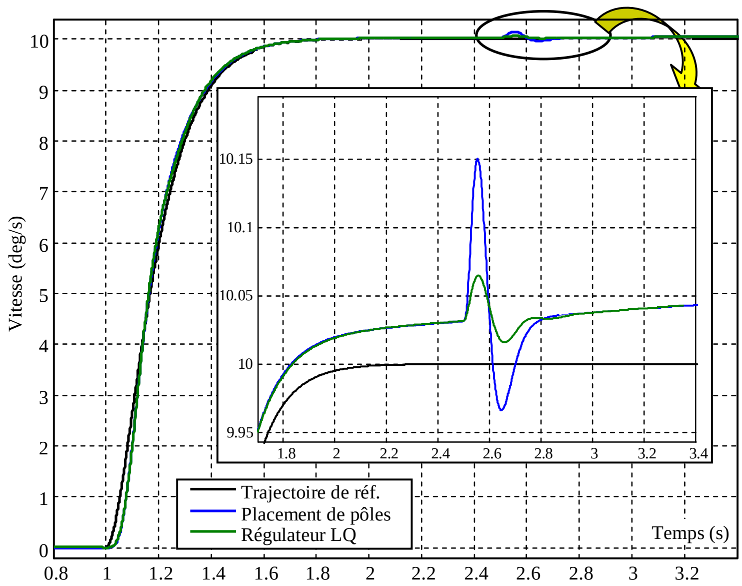


Figure 107: Réponse en vitesse de l'axe Pivot

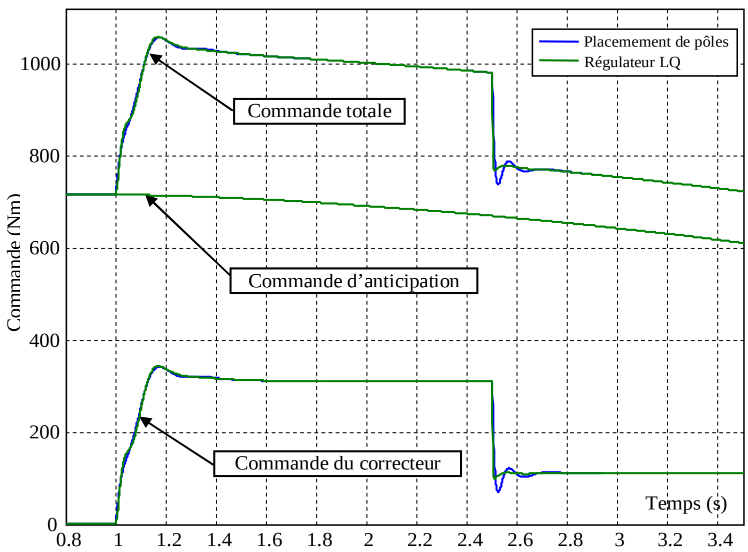


Figure 108: Commande par retour d'état de l'axe Pivot

La figure 107 montre l'évolution de la vitesse angulaire du Pivot :

- en réponse à une consigne de 10°/s en utilisant une commande par anticipation obtenue par une compensation de la charge statique (78),
- soumis à une perturbation de couple de 220 Nm à $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ représentant une variation de la position du tube. En effet, comme la masse du détecteur est de 65 kg, et la course totale de l'axe lift (35 cm), la variation du couple ramené sur l'axe Pivot peut atteindre :

$$\Delta\Gamma = 9.8 \cdot 65 \cdot 0.35 = 222.95 \text{ Nm} \tag{89}$$

Ces courbes montrent :

- un bon degré d'amortissement de l'axe,
- un bon comportement vis-à-vis de la variation du couple perturbateur, la variation de vitesse reste limitée à 0,15 °/s pour le régulateur à placement de pôles et 0,05°/s pour le régulateur LQ,
- absence de vibrations tant en régime transitoire que permanent.

La figure 108 montre les commandes issues de l'anticipation et du retour d'état. Cette figure montre un effet plus important produit par l'anticipation que celui résultant du bouclage.

La figure 109 montre les diagrammes de Bode en boucle ouverte entre le couple sur l'axe et la commande pour les deux synthèses, ces tracés montrent pour le réglage nominal des marges relativement confortables :

	Marge de phase	Marge de gain
Placement de pôles	68°	19 dB
Régulateur LQ	85°	77 dB

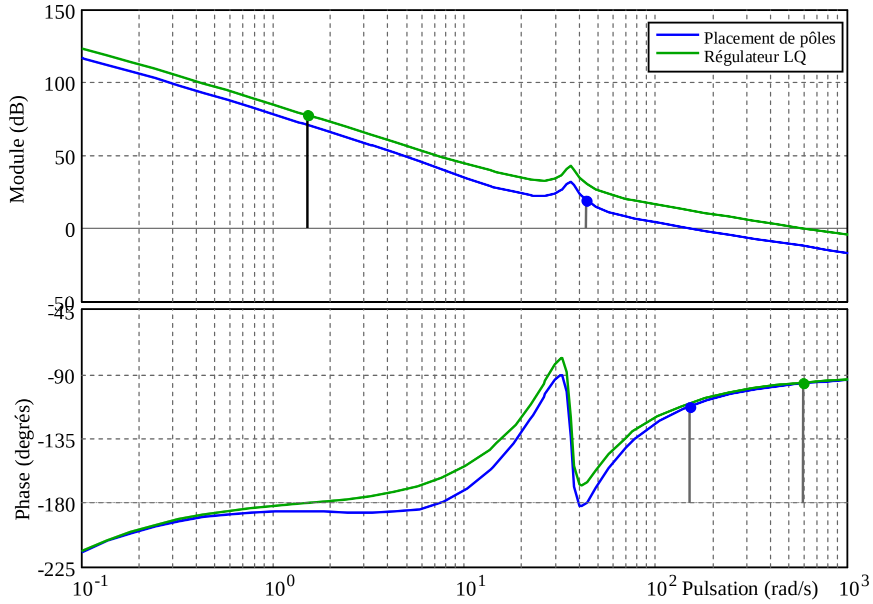


Figure 109: Diagramme de Bode en boucle ouverte de l'axe Pivot

La figure 110 et figure 111 montrent les fonctions de sensibilité directe et complémentaire. Elles permettent de conclure à l'absence de résonance sur le modèle nominal.

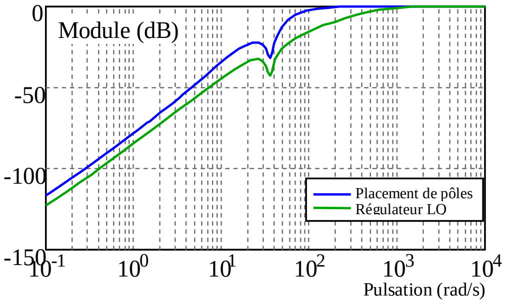


Figure 110: Fonction de sensibilité directe de l'axe Pivot

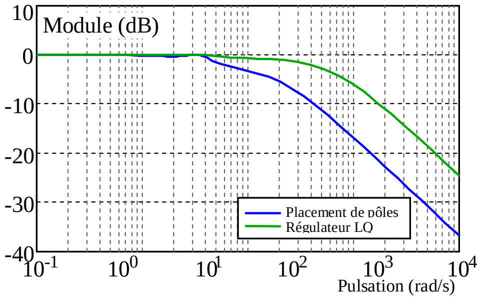


Figure 111 : Fonction de sensibilité complémentaire de l'axe Pivot

5.2.2 Synthèse d'un observateur

5.2.2.1 Cas des mesures côté moteur seul

Comme mentionné précédemment, la synthèse de l'observateur d'état se fait indépendamment de la première phase de calcul des gains de la commande par retour d'état. Dans un premier temps, nous allons envisager le cas d'un estimateur identité avec comme seule mesure considérée la position de l'arbre moteur. Ce choix est guidé par la réalisation matérielle actuelle où les seules mesures disponibles sont la position et la vitesse de l'arbre moteur.

Dans un deuxième temps, nous allons examiner le gain potentiel, et les améliorations de performances, qu'il est possible d'atteindre par des mesures complémentaires d'accélération sur la charge. Et bien sûr leur impact sur la robustesse de la commande.

L'équation d'un observateur d'état linéaire est donnée par :

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + B\Gamma_m + L\cdot(Y - C\hat{X}) \tag{90}$$

D'une manière analogue au cas de la synthèse de la commande, deux approches ont été utilisées pour le calcul du gain de l'observateur : d'une part la synthèse par placement des valeurs propres de $(A - LC)$, d'autre part une approche de type LQ. On peut remarquer que cette deuxième approche revient en pratique à la synthèse d'un filtre de Kalman.

Comme il sera montré dans le paragraphe 5.2.2.3, lors de l'analyse comparative des résultats, l'utilisation seule de mesures effectuées côté arbre moteur se révèle très pénalisante en termes de robustesse.

5.2.2.2 Observateur avec mesure d'accélération

Comme il sera vérifié dans la suite, l'implémentation d'un observateur pour la mise en place de la commande par retour d'état dégrade la robustesse de la loi de commande. Cette dégradation étant ici d'autant plus importante, dans le cas des robots utilisés, en raison de la présence de modes souples non amortis. Les mesures de la position du tube ou du détecteur dans un repère absolu sont difficiles, aussi une solution permettant d'enrichir les mesures est l'utilisation de mesures d'accélérations au niveau du tube. L'objectif de cette mesure est principalement d'accroître la robustesse de la commande en ayant une mesure supplémentaire dans l'estimation des variables d'état du système.

Les essais expérimentaux ont pu être menés au moyen d'un dispositif expérimental, décrit en annexe C, développé au cours des travaux de thèse. Notons qu'une retombée supplémentaire a été le recalage des fréquences des modes propres.

Le vecteur de mesure considéré est alors : $Y = \begin{bmatrix}\dot{\theta}_m & \theta_m & \ddot{\theta}\end{bmatrix}^T$. En conséquence, le modèle dynamique de l'observateur sera défini tel que :

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + B\Gamma_m + L\left(Y - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{d}{J_{PVT}} & 0 & -\dfrac{k}{J_{PVT}} & \dfrac{k}{J_{PVT}} \end{bmatrix}\hat{X}\right) \tag{91}$$

Le choix des pôles dans ce cas doit être plus judicieux, car la mesure de l'accélération n'est pas prise en compte pour le calcul de la commande. Dès lors, pour lui donner plus d'influence lors de l'estimation des variables d'état, il ne suffirait pas seulement de placer les pôles de l'observateur trois fois plus rapidement que les pôles du correcteur. Il sera nécessaire de pondérer davantage l'erreur sur l'accélération.

Le dispositif a été implémenté sur le robot Innova frontal afin de mesurer l'accélération directement coté charge i.e. sur le tube et le détecteur (Annexe C). A titre illustratif, la figure 112 et la figure 113 montrent les mesures d'accélération lors d'essais de freinage, en mode normal et en mode urgence, à partir de vitesses initiales de 10°/s. Ces mesures :

- font clairement apparaître les vibrations dues aux modes souples.
- comme on peut le comprendre aisément, en raison d'une plus grande excitation des modes haute fréquence, elles sont plus importantes lors des freinages et en particulier en cas de freinage d'urgence.

Enfin la reconstruction de la mesure d'accélération de l'axe Pivot, $Y = \begin{bmatrix}\dot{\theta}_m & \theta_m & \ddot{\theta}\end{bmatrix}^T$, à partir des mesures brutes de l'accélération du tube $(\ddot{x}_{tube}, \ddot{y}_{tube}, \ddot{z}_{tube})$ ou celle du détecteur $(\ddot{x}_{\det}, \ddot{y}_{\det}, \ddot{z}_{\det})$ nécessite une série de traitements préalables des grandeurs mesurées, à savoir : la mise à l'échelle, un filtrage passe-bas des bruits, un filtrage passe-haut pour la suppression du biais du capteur et la reconstruction de l'amplitude de l'accélération en fonction de la position de l'axe Carc. Ces transformations ne sont pas détaillées dans ce mémoire, la figure 114 montre les résultats après les différentes transformations.

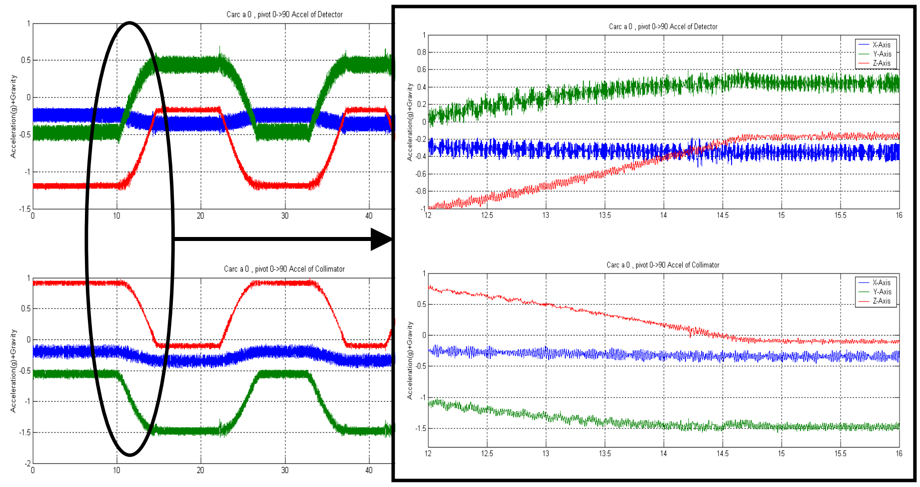


Figure 112 : Mesure d'accélération, freinage en mode normal (relâchement de la manette de commande), $V_{init} = 10° / s$

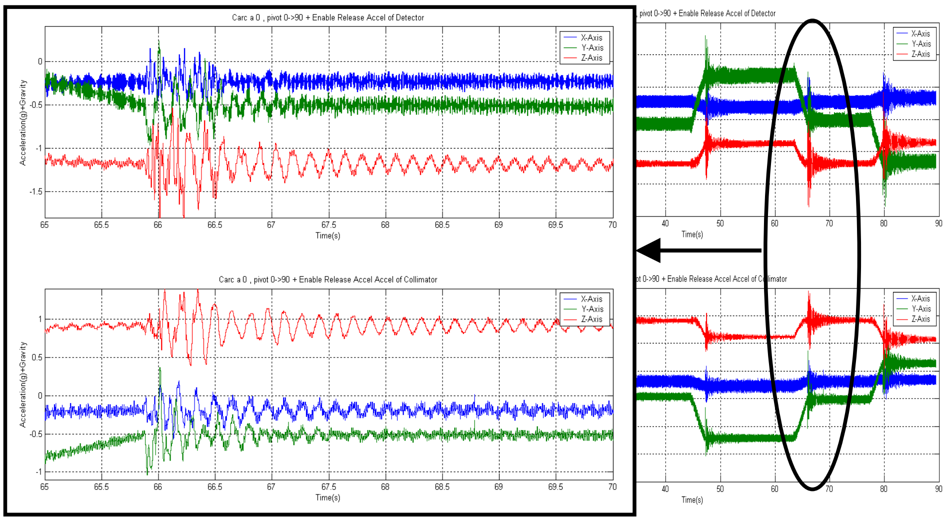


Figure 113: Mesure d'accélération, Arrêt d'urgence, $V_{init} = 10° / s$

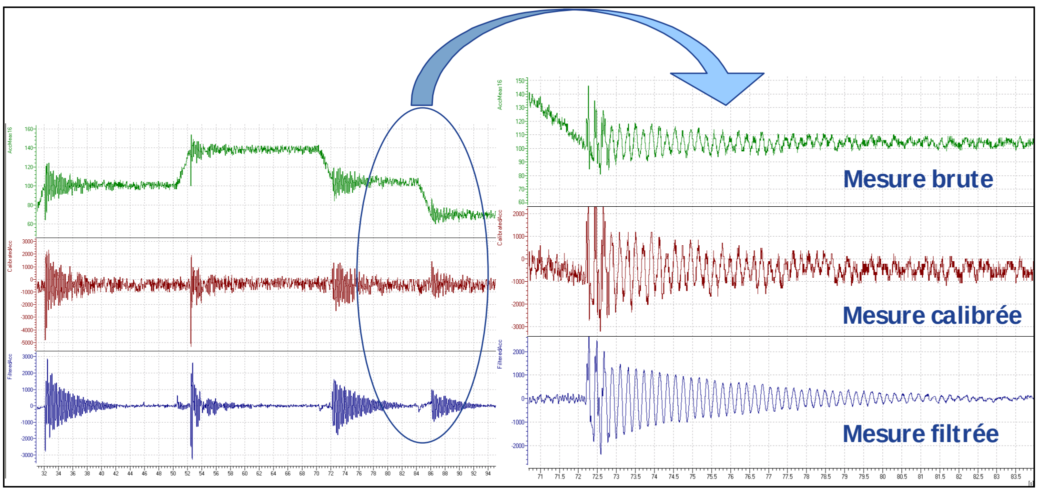


Figure 114: Traitement du signal de l'accélération

Dans le cas de l'utilisation des mesures d'accélération pour reconstituer l'état, seule l'approche par placement des pôles a été abordée. Les emplacements polaires pour cet observateur sont identiques à ceux du cas précédent opérant à partir des mesures côté moteur.

5.2.2.3 Analyse des résultats

Pour l'analyse des marges de stabilité, la boucle a été ouverte au niveau de la commande comme illustré par le schéma de la figure 115. Les diagrammes de Bode obtenus sont montrés dans la figure 116 :

- avec retour d'état et sans observateur (R1),
- avec retour d'état et observateur, avec mesures de position moteur et d'accélération de la charge (R2),
- avec retour d'état et observateur (synthèse de type LQ), avec mesures de position moteur seule (R3),
- avec retour d'état et observateur (synthèse par placement des pôles) avec mesures de position moteur seule (R4).

L'analyse de ces tracés montre que l'introduction de l'observateur dégrade les marges de stabilité avec des chutes dépendant du type d'observateur utilisé. Ces résultats, résumés dans le tableau 8, montrent en particulier :

- que la mesure d'accélération permet de conserver au système des marges de stabilité suffisantes,
- que la synthèse de type LQ, avec mesure de position seule permet de conserver aussi des marges de phase suffisantes. Toutefois, le calcul des pôles de l'observateur montre que l'un des pôles devient important en valeur absolue pouvant conduire à des difficultés dans la mise en place numérique de l'observateur,
- que la synthèse par placement de pôles, avec mesure de position seule annule les marges de stabilité et ne peut donc être retenue pour la mise en place de la commande.

	ω_c (rad/s)	$\Delta\varphi$ (°)	ΔG (dB)
Retour d'état direct	300	70	15 dB
Observateur avec mesure d'accélération de la charge	200	45	15 dB
Observateur avec mesure de position moteur seule (synthèse de type LQ)	100	45	18 dB
Observateur avec mesure de position moteur seule (placement de pôles)	/	≈ 0	≈ 0

Tableau 8. Marges de stabilité

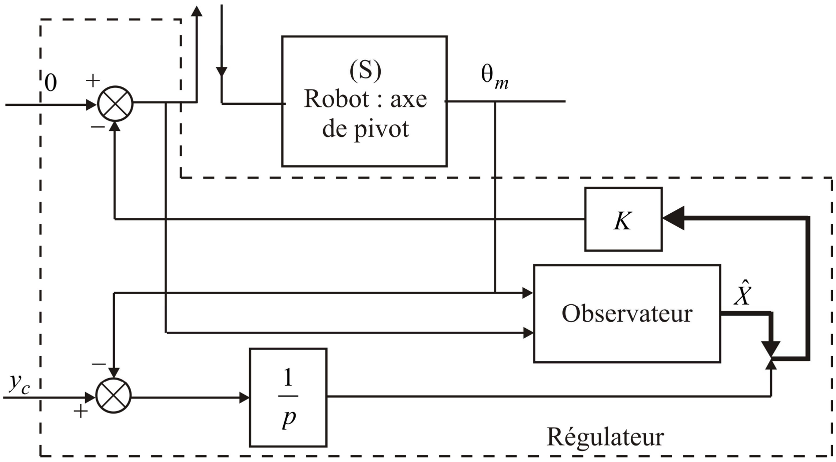


Figure 115: Schéma d'analyse en boucle ouverte

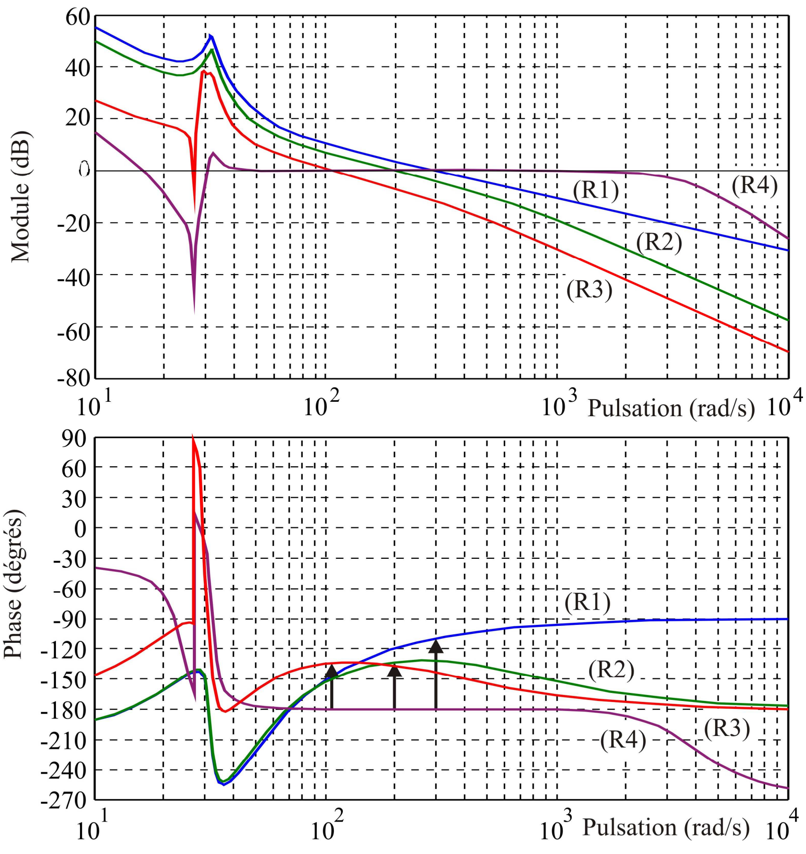


Figure 116: Diagrammes de Bode en boucle ouverte

5.3 Régulateur H_∞

Dans cette partie, nous allons présenter l'application de la méthode de synthèse H_∞ (*Duc et Font 1999*). Cette méthodologie est maintenant bien connue, aussi les principes méthodologiques ne seront pas présentés mais l'accent sera mis sur son adaptation au problème de la suppression des vibrations et en particulier dans le cadre de l'application sur le robot Innova. Le modèle de synthèse est rappelé par le schéma de la figure 117.

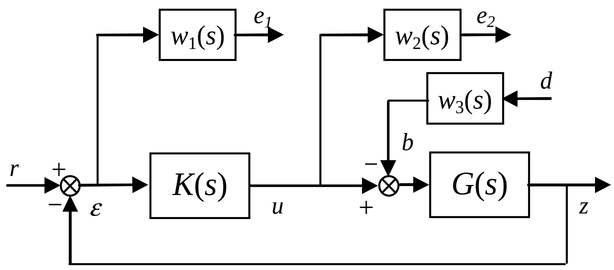


Figure 117 : Structure de H_∞

Nous allons donc considérer un correcteur ayant comme entrée l'erreur de la position de l'arbre moteur ε_{θ_m} (Figure 118) et une sortie le couple moteur. Dès lors, le schéma de synthèse sera :

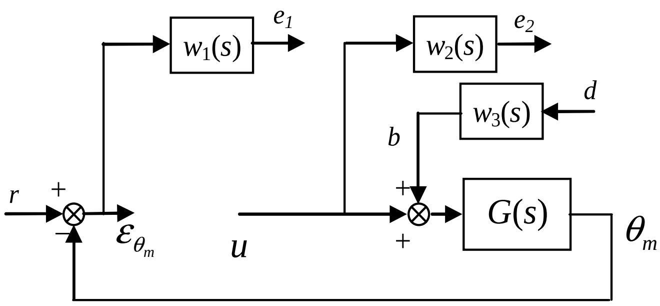


Figure 118 : Structure de synthèse H_∞

Chaque pondération w_i peut représenter un simple gain ou bien un filtre. Le réglage dans le cadre de la commande de l'axe Pivot a été obtenu pour le jeu de paramètres suivants :

	w_1	w_2	w_3
Ordre	1	1	0
Gain statique	50	10^{-5}	500
Gain à l'infini	0,8	50	–
Pulsation de coupure	15	$3 \cdot 10^5$	–

Tableau 9 : Paramètres des fonctions de pondération

La synthèse H_∞ conduit à un correcteur d'ordre six, dont le diagramme de Bode est représenté sur la figure 119, avec $\gamma = 1{,}957$:

– il faut noter que le réglage des filtres s'est avéré très délicat et n'a pas permis d'atteindre les performances dynamiques souhaitées en termes de poursuite de trajectoire et de rejet de perturbations,

– la vérification des gabarits montre les contraintes fréquentielles imposées aux différents transferts du système (Figure 120),

– le tracé des diagrammes de Bode en boucle ouverte corrigée (Figure 121) permet de vérifier les marges de stabilité du système : marge de gain $\Delta G = 9{,}61\,\text{dB}$, marge de phase $\Delta\phi = 56{,}2°$.

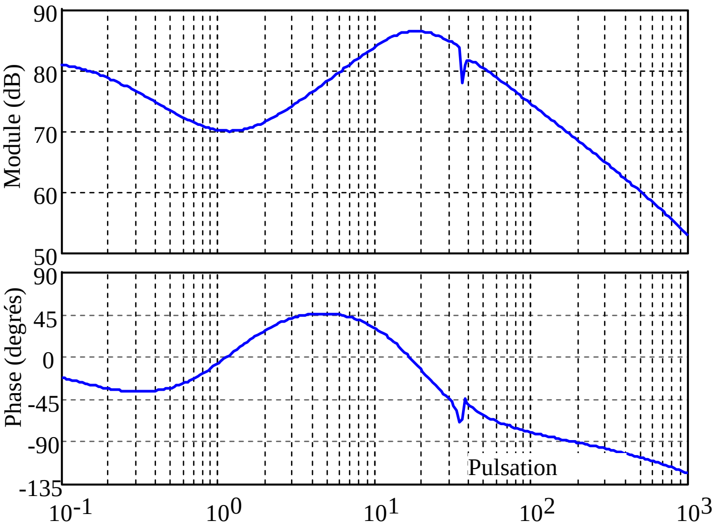


Figure 119: Diagramme de Bode du correcteur

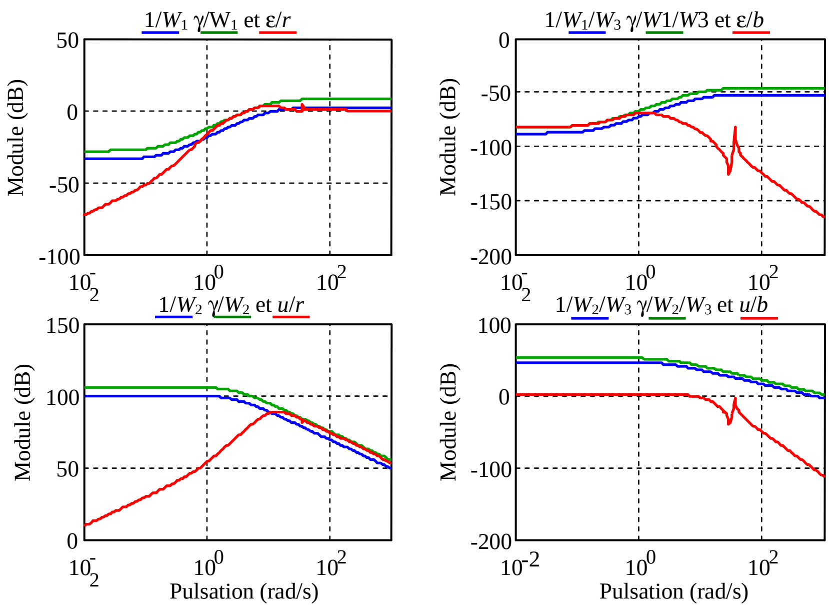


Figure 120: Principaux transferts et gabarits correspondants

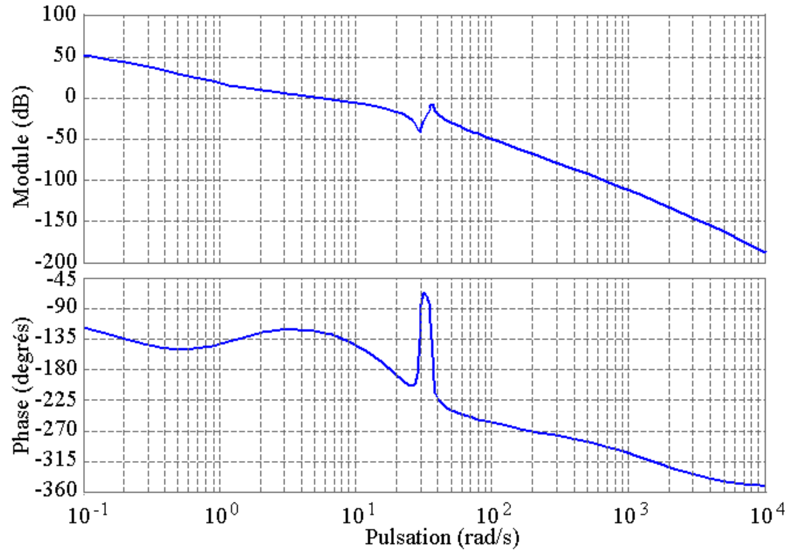


Figure 121: Diagramme de Bode de la boucle ouverte corrigée

La figure 122 montre la réponse temporelle à une consigne de vitesse de 10 °/s soumise à une perturbation de couple de 50 Nm à l'instant $t = 4\,\mathrm{sec}$. Cette réponse montre un faible temps de réponse ainsi qu'un dépassement important comparée à l'approche de régulation en cascade et à la commande LQ (Figure 107). En outre, en rejet de perturbation les performances obtenues restent très limitées. Enfin, la figure 123 montre le couple à l'axe Pivot, la valeur maximale reste largement en dessous des valeurs admissibles (2000 Nm). Ce dernier résultat est cependant assez prévisible car les performances dynamiques sont faibles.

Notons cependant que les moindres performances de la commande H_∞ comparativement à la commande par retour d'état (avec ou sans observateur) doivent être ici nuancées. En effet, la commande H_∞ n'utilise que la seule mesure de position contrairement à la commande par retour d'état.

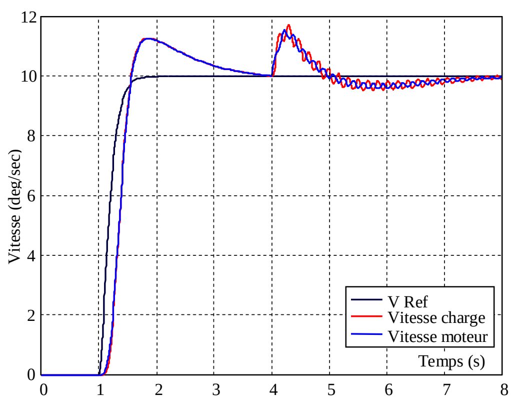


Figure 122 : Réponse en vitesse de l'axe Pivot

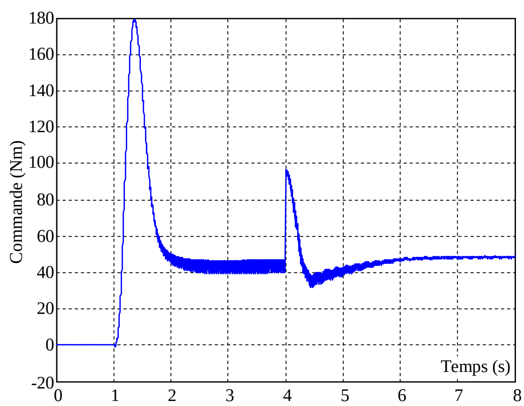


Figure 123: Couple Moteur de l'axe Pivot

5.4 *Robustesse des lois de commande*

5.4.1 Analyse des valeurs singulières, μ-analyse

Une fois la loi de commande établie, il est important de considérer sa robustesse vis-à-vis des incertitudes paramétriques du système. Dans le cadre de la commande de l'axe Pivot du robot Innova, nous nous intéressons à l'étude de la robustesse de la commande à des variations de l'inertie de l'axe J_{PVT} ainsi que la raideur de transmission k. Cette étude a été effectuée en utilisant la valeur singulière structurée (*Duc et Font 1999*). Les différentes sources d'incertitudes du système sont rassemblées dans une matrice $\Delta(s)$ (Figure 124), telle que :

$$\Delta(s) = \mathrm{Diag}\left\{\Delta_1(s),\ldots,\Delta_q(s),\delta_1 I_{r_1},\ldots,\delta_r I_{r_r},\varepsilon_1 I_{c_1},\ldots,\varepsilon_c I_{c_c}\right\}$$

avec $\Delta_i(s) \in RH_\infty;\ \delta_i \in R;\ \varepsilon_i \in C$

On rappelle que si la valeur singulière vérifie : $\forall\omega,\ \mu_{\underline{\Delta}}(H(j\omega)) \le \alpha$ alors la stabilité du système est garantie pour $\left\|\Delta(s)\right\|_\infty \le 1/\alpha$.

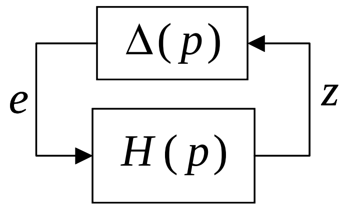


Figure 124: Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité

Dans un premier temps, nous allons traiter la robustesse vis-à-vis de l'incertitude de l'inertie de l'axe J_{PVT}. Pour le système bouclé $\dot{X} = (A - BK)\cdot X$, nous avons :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_m \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{J_{PVT}} & 0 & -\frac{k}{J_{PVT}} & \frac{k}{J_{PVT}} \\ -\frac{k_1}{J_m} & -\frac{f_v+k_2}{J_m} & \frac{k+k_3}{J_m} & -\frac{k+k_4}{J_m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_m \\ \theta \\ \theta_m \end{bmatrix}$$

où k_i sont les gains du retour d'état.

En posant : $\dfrac{1}{J_{PVT}} = \dfrac{1}{J_{pvt0}} + \dfrac{1}{J_{pvt1}}\delta_{J_{pvt}}$, on peut écrire :

$$\ddot{\theta} = \frac{k}{J_{pvt0}}\theta_m - \frac{k}{J_{pvt0}}\theta - \frac{d}{J_{pvt0}}\dot{\theta} + \underbrace{\frac{1}{J_{pvt1}}\delta_{Jpvt}\left(\underbrace{k\theta_m - k\theta - d\dot{\theta}}_{z_1}\right)}_{e_1}$$

Le système (H) est alors décrit suivant la formulation :

$$H:\begin{cases}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\theta}_m\\ \dot{\theta}\\ \dot{\theta}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{d}{J_{pvt0}} & 0 & -\frac{k}{J_{pvt0}} & \frac{k}{J_{pvt0}}\\ -\frac{k_1}{J_m} & -\frac{f_v+k_2}{J_m} & \frac{k+k_3}{J_m} & -\frac{k+k_4}{J_m}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\theta}_m\\ \theta\\ \theta_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{J_{pvt1}}\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}e_1\\ z_1=\begin{bmatrix}-d & 0 & -k & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\theta}_m\\ \theta\\ \theta_m\end{bmatrix}+[0]e_1\end{cases}$$

Le calcul de la valeur singulière structurée $|\mu_{\Delta}(H(j\varpi))|$ permet de conclure sur la robustesse de la commande vis-à-vis de la variation de J_{PVT}. Le tableau 10 résume l'incertitude admissible sur J_{PVT} qui garantit la stabilité du système selon différentes approches adoptées pour la commande.

De même, pour l'incertitude sur la raideur, en posant $k=k_{o}+k'\delta_k$ on aura pour la description de l'angle côté moteur :

$$\ddot{\theta}_m=-k_1\dot{\theta}-\frac{f_v+k_2}{J_m}\dot{\theta}_m+\frac{k_0+k_3}{J_m}\theta-\frac{k_0+k_4}{J_m}\theta_m-\frac{k'}{J_m}\underbrace{\delta_k\left(\underbrace{\theta_m-\theta}_{z_1}\right)}_{e_1}$$

Et pour l'angle côté charge :

$$\ddot{\theta}=\frac{k_0}{J_{pvt}}\theta_m-\frac{k_0}{J_{pvt}}\theta-\frac{d}{J_{pvt}}\dot{\theta}+\frac{k'}{J_{pvt}}\delta_k(\theta_m-\theta)$$

En conséquence, le système (H) pourra être reformulé, tel que :

$$H:\begin{cases}\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\theta}_m\\ \dot{\theta}\\ \dot{\theta}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{d}{J_{pvt}} & 0 & -\frac{k_0}{J_{pvt}} & \frac{k_0}{J_{pvt}}\\ -\frac{k_1}{J_m} & -\frac{f_v+k_2}{J_m} & \frac{k+k_3}{J_m} & -\frac{k+k_4}{J_m}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\theta}_m\\ \theta\\ \theta_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{k'}{J_{pvt}}\\ -\frac{k'}{J_m}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}e_1\\ z_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\theta}_m\\ \theta\\ \theta_m\end{bmatrix}+[0]e_1\end{cases}$$

Le tableau 10 résume l'incertitude admissible de k qui garantit la stabilité du système selon plusieurs approches de régulations.

	$\delta_{J_{PVT}}$ Inertie	δ_k raideur
Régulation Cascade	0,078	0,078
Commande LQ	1,21	1,25
Commande LQ+observateur	1,17	0,973
Commande LQ+observateur avec mesure d'accélération	1,4	1,26

Tableau 10: Plage de stabilité à la variation de l'inertie J_{PVT} et de la raideur k

Les résultats obtenus montrent que la mesure de l'accélération de la charge améliore la robustesse du système face aux incertitude sur l'inertie J_{PVT}.

5.4.2 Analyse sous forme LPV de la robustesse (cas de la commande par retour d'état)

Une des propriétés de ce système est le changement de modèle dû d'une part à la variation paramétrique, essentiellement, le moment d'inertie de l'axe, d'autre part aux incertitudes dues à la raideur et aux frottements visqueux. Notons aussi que si la raideur est constante mais incertaine, le coefficient de frottement visqueux peut être soumis à des variations en particulier selon la température.

L'analyse de l'ensemble des modèles linéarisés dans tout le domaine de fonctionnement permet de conclure sur leur stabilité mais cela ne garantit pas la stabilité du système en particulier en présence des variations d'inertie selon la position du Carc.

Pour l'analyse de stabilité globale, nous avons procédé en formulant le système suivant une représentation LPV affine. Des résultats généraux *(Biannic 1996; Peaucelle 2000)* permettent de conclure sur la stabilité de ce type de systèmes.

Rappelons que dans le cas du modèle de l'axe Pivot flexible, la représentation d'état est la suivante :

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{J_{PVT}} & 0 & -\frac{k}{J_{PVT}} & \frac{k}{J_{PVT}} \\ 0 & -\frac{f_v}{J_m} & \frac{k}{J_m} & -\frac{k}{J_m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \Gamma_m$$

où $X = \begin{bmatrix} \dot{\theta} & \dot{\theta}_m & \theta & \theta_m \end{bmatrix}^T$. En prenant comme paramètres :

$$\theta_1 = \frac{k}{J_{PVT}} \;;\; \theta_2 = \frac{d}{J_{PVT}} ;\; \theta_3 = \frac{k}{J_m}$$

Il est possible, de reformuler la représentation d'état selon la forme suivante :

$$\dot{X} = (A_0 + A_1\tilde{\theta}_1 + A_2\tilde{\theta}_2 + A_3\tilde{\theta}_3)X + B_0\Gamma_m \qquad (92)$$

où :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -\theta_{20} & 0 & -\theta_{10} & \theta_{10} \\ 0 & -\frac{f_v}{J_m} & \theta_{30} & -\theta_{30} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\theta_{10} & \theta_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} A_2 = \begin{bmatrix} -\theta_{20} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{30} & -\theta_{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $\theta_1 = \theta_{10}(1+\tilde{\theta}_1)$, $\theta_2 = \theta_{20}(1+\tilde{\theta}_2)$, $\theta_3 = \theta_{30}(1+\tilde{\theta}_3)$.

On peut remarquer aussi que le choix du point nominal peut conditionner les résultats sur l'analyse de la stabilité. Pour la commande de l'axe Pivot, nous conseillons de choisir le jeu de paramètres correspondant au moment d'inertie minimal, soit :

$$\tilde{\theta}_1 \in [-0{,}6\,;+0{,}6],\ \tilde{\theta}_2 \in [-1\,;+5],\ \tilde{\theta}_3 \in [-2\,;+2]$$

D'un point de vue des paramètres physiques, ces intervalles correspondent à des variations dues essentiellement au changement de point de fonctionnement sur le moment d'inertie $J_{PVT} \in [64\,;101]\ \mathrm{Nm}$ et à des incertitudes sur le terme de frottement visqueux et sur la raideur $k = (1 \pm 0{,}2)k_0$.

La commande par retour d'état étant invariante, la formulation obtenue en boucle fermée est aussi de la forme LPV. La matrice d'évolution en boucle fermée se déduit facilement de la représentation en boucle ouverte par la relation $(A_0 - B_0K) + A_1\tilde{\theta}_1 + A_2\tilde{\theta}_2 + A_3\tilde{\theta}_3$. La dépendance paramétrique est la même que celle en boucle ouverte car la matrice B ne dépend pas des paramètres.

La conclusion sur la stabilité de ce système peut être obtenue par le calcul d'une borne supérieure du gain $L_2 = \sqrt{\int u^2(t)dt \Big/ \int v^2(t)dt}$ du transfert $v \to u$ selon le schéma de la figure 125. Sur cette structure, ce transfert est représentatif de la fonction de sensibilité directe.

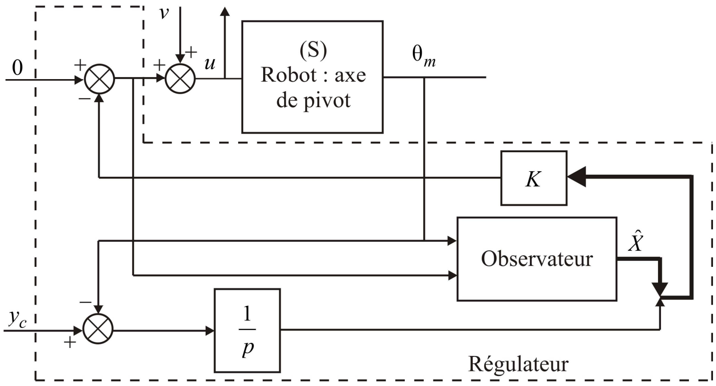


Figure 125: Schéma d'analyse

Les résultats obtenus, résumés dans le tableau 11, entraînent les conclusions suivantes :

– la stabilité est garantie dans tout le domaine couvert par les trois paramètres $[\tilde{\theta}_1 ; \tilde{\theta}_2 ; \tilde{\theta}_3]$ dans le cas de la commande par retour d'état ;

– l'utilisation d'un observateur avec mesure d'accélération conserve cette propriété avec un légère augmentation de la borne obtenue du gain L_2 ;

– l'utilisation d'un observateur avec pour seule mesure la position de l'arbre moteur et la structure cascade ne permet pas de garantir la stabilité dans tout le domaine de variation des paramètres.

Structure de commande		**Borne Sup L_2**
Retour d'état	Direct	1,02
	Observateur avec mesure d'accélération de la charge	1,25
	Observateur avec mesure de position moteur seule	Pas de stabilité garantie
Structure cascade		Pas de stabilité garantie
Régulation de position seule (PI)		Pas de stabilité garantie

Tableau 11: Borne supérieure du gain L_2 pour les différentes structures de commande

6 Etude comparative des stratégies de commande

Dans cette partie, nous allons établir un bilan comparatif des différentes approches retenues pour la commande de l'axe Pivot du robot Innova. Nous allons focaliser l'étude comparative sur la régulation en cascade (structure actuelle) et la commande par retour d'état, qui ont montré des résultats probants pour la commande de cette classe de systèmes. De plus, la régulation cascade a été complétée, par rapport à la structure implémentée par une action d'anticipation sur les couples appliquées aux axes. Notons par ailleurs que ces structures se prêtent bien à la mise en œuvre sur des microcontrôleurs. Les critères pris en compte pour cette analyse sont :

- les performances dynamiques,
- l'impact du filtrage de la consigne,
- l'impact de l'action d'anticipation en termes de compensation de la dynamique du mouvement.

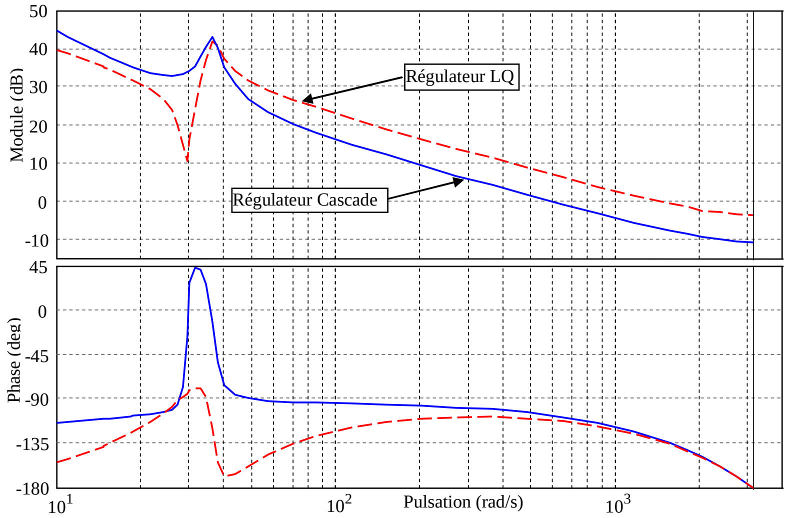


Figure 126: Réponse fréquentielle en boucle ouverte

Les lois de commande sont réglées pour répondre aux mêmes exigences en termes de marges de stabilité sur le modèle nominal, les approches de synthèse ont été détaillées précédemment dans les paragraphes (5.1 et 5.2). La figure 126 montre les diagrammes de Bode en boucle ouverte corrigée (implémentées en discret).

6.1 *Performances dynamiques*

Pour la comparaison des performances dynamiques, nous allons considérer le cas d'étude suivant :

- Trajectoire filtrée par un filtre coupe bande réglé pour rejeter le premier mode propre du système ainsi qu'un filtre passe bas d'ordre deux (3.1).

– Anticipation par compensation du couple de charge.

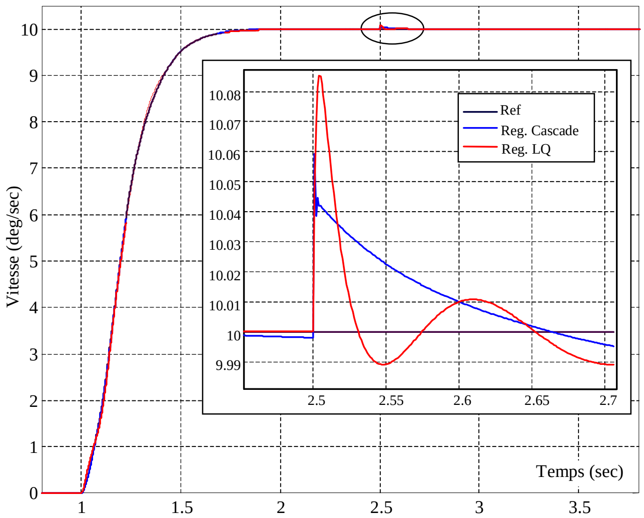


Figure 127 : Réponse de l’axe Pivot de l'arbre moteur

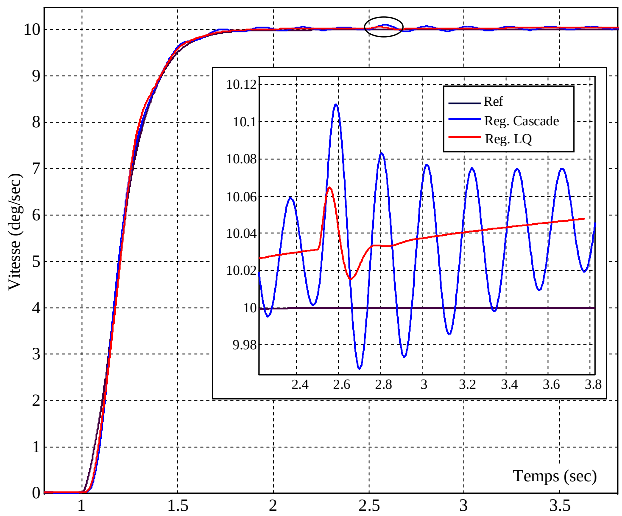


Figure 128 : Réponse de l’axe Pivot de la charge

La figure 127 et la figure 128 montrent les réponses en vitesse de l’axe Pivot (arbre moteur et charge) :

– en réponse à une consigne de 10°/s,

– soumis à une perturbation de couple de 220 Nm à $t = 2{,}5\,\mathrm{s}$ représentant une variation de la position du tube, relation (89).

On peut noter sur ces courbes :

– que les performances dynamiques des deux approches de régulation semblent assez similaires au niveau de la vitesse de l’arbre moteur (Figure 127),

- que la commande par retour d'état présente un meilleur amortissement du comportement vibratoire de la charge (Figure 128)
- les deux approches ont des performances satisfaisantes vis-à-vis du rejet de perturbation.

La figure 129 montre le couple moteur pour les deux lois de commande.

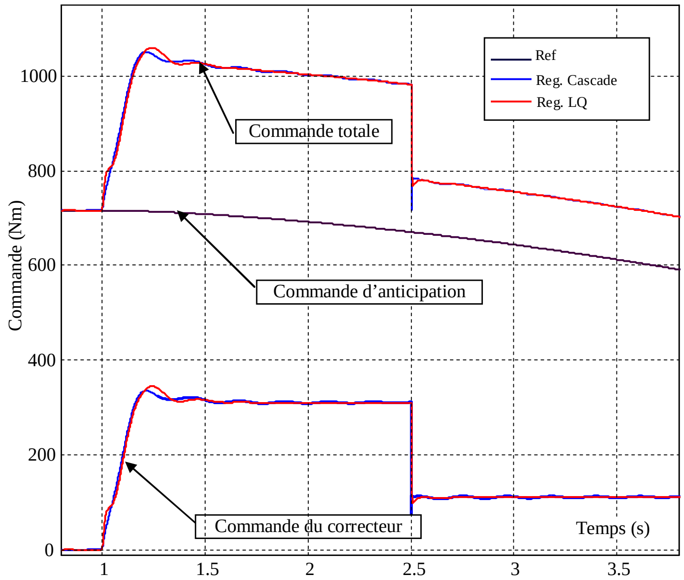


Figure 129 : Couple Moteur

6.2 Influence du filtrage de la consigne

Nous allons à présent analyser l'impact de la suppression du filtre coupe bande de la structure de commande décrite précédemment. Les résultats obtenus montrent :

- que la réponse en vitesse de l'arbre moteur (Figure 130) est peu impactée par la suppression de ce filtre dans les deux cas d'étude,
- la vitesse de la charge (Figure 131) dans le cas de régulation en cascade se dégrade sensiblement,
- dans le cas de la commande LQ les performances vis-à-vis du comportement vibratoire reste inchangées.

Ce résultat montre clairement que le rejet du premier mode est pris en compte systématiquement dans la commande pas retour d'état par l'intermédiaire du bouclage de la sortie estimée (côté charge). Dans la cas de la régulation en cascade, cette mesure n'est pas prise en compte. Dès lors, l'utilisation d'un filtrage passif pour limiter le mode vibratoire devient indispensable. Nous constatons également que l'effet du mode oscillant se traduit très clairement sur la grandeur de commande (couple moteur) dans le cas de la structure cascade (Figure 132).

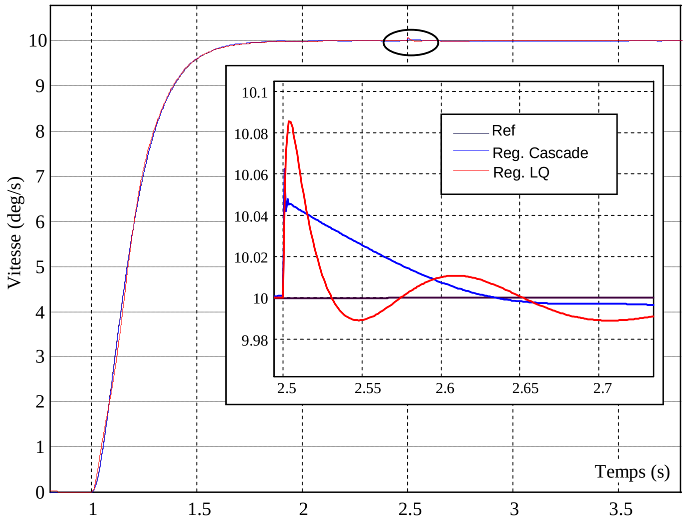


Figure 130 : Réponse de l'axe Pivot de l'arbre moteur

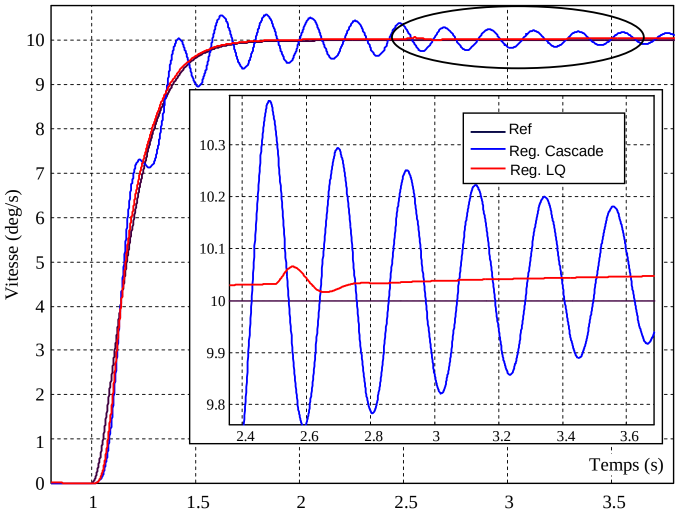


Figure 131 : Réponse de l'axe Pivot de la charge

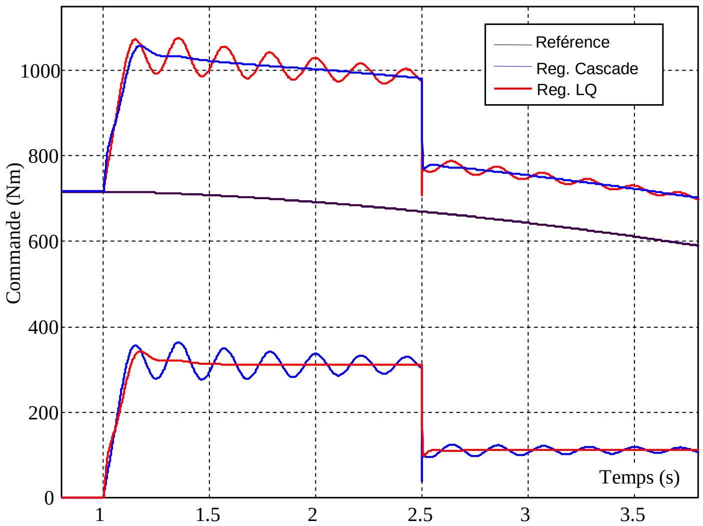


Figure 132 : Couple Moteur

6.3 *Influence de l'action d'anticipation*

Dans cette partie, nous allons analyser l'impact de la compensation de la dynamique du mouvement rigide sur les performances globales de la loi de commande. En effet, dans ce cas l'action d'anticipation comporte les points suivants :

- la compensation du couple de charge (exemple de référence 6.1) est déjà incluse dans les cas précédents ;
- elle est complétée par le couple de compensation de la dynamique du mouvement rigide (4.2).

Pour cette analyse, l'action de filtrage de la trajectoire par un filtre coupe bande a été supprimée.

La figure 133 montre le couple moteur de l'axe Pivot. On constate que l'action du correcteur est significativement réduite. En effet, elle correspond uniquement à la correction de l'erreur de poursuite ainsi qu'au rejet de la perturbation.

On peut noter que l'ajout de la compensation du couple dynamique n'apporte pas d'amélioration significative sur les réponses temporelles en régime permanent (Figure 134, Figure 135). Toutefois, en régime transitoire nous constatons que l'erreur de poursuite de trajectoire est réduite sur l'arbre moteur (Figure 136).

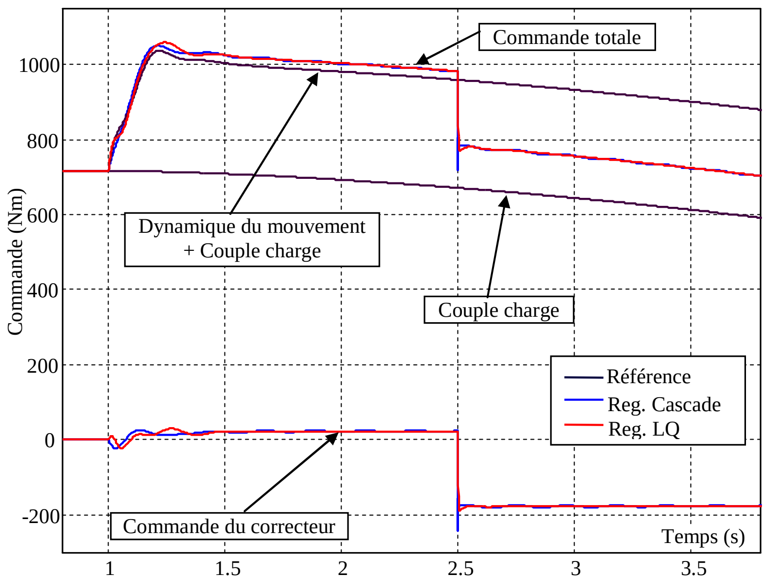


Figure 133 : Compensation de la dynamique de mouvement (Couple moteur)

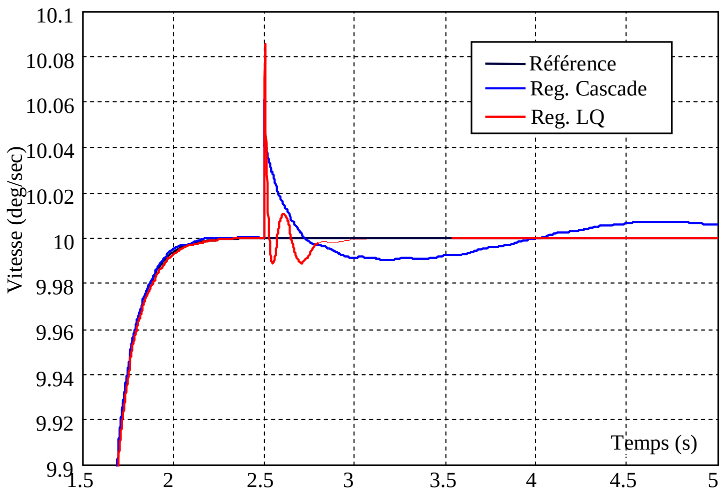


Figure 134 : Réponse de l'axe Pivot de l'arbre moteur

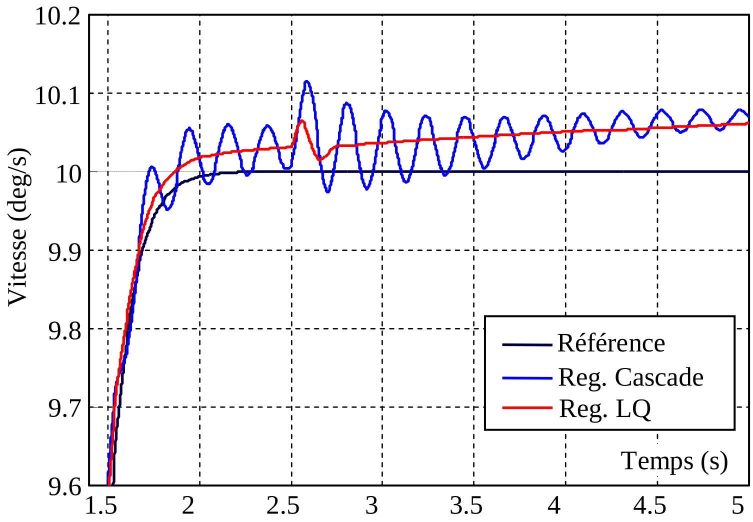


Figure 135 : Réponse de l'axe Pivot de la charge

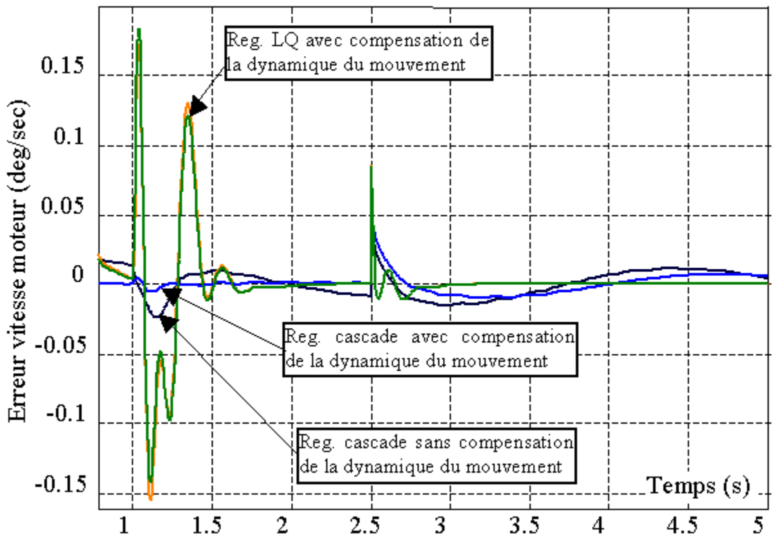


Figure 136: Erreur de poursuite de l'axe Pivot (vitesse de l'arbre moteur)

7 Conclusion

Ce chapitre a porté sur l'élaboration d'une méthodologie de commande monoaxe pour la commande de mouvements de l'axe Pivot du robot Innova Frontal.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux méthodologies de génération de trajectoires. Nous avons pu démontrer que la trajectoire de consigne a un impact important sur les performances du système en termes de réduction des vibrations, particulièrement, lors de l'utilisation d'une boucle de régulation ne prenant pas en compte toutes les variables d'état du système pour le calcul de la commande telle que la régulation en cascade. Auquel cas, une attention particulière doit être portée sur le filtrage de la consigne en vue de limiter l'impact sur les modes propres du système.

Par ailleurs, nous avons proposé une nouvelle approche de freinage qui a pour objectif de réduire les vibrations résiduelles. En effet, un profil de freinage en deux temps a été élaboré. Ce dernier est exécuté en deux phases, la première étant une décélération classique de l'axe suivie d'un mouvement inverse permettant de dissiper l'énergie potentielle stockée dans l'élasticité de l'axe. La validation expérimentale de cette approche sur l'axe Pivot du robot Innova a montré des résultats très encourageants. Nous avons aussi étudié le potentiel de l'application de la théorie de platitude pour la génération de trajectoire dans ce cadre précis. Celle-ci a montré des performances remarquables sur le simulateur de l'axe Pivot. L'implémentation de cette technique sera prévue en perspective à ces travaux de thèse.

Pour le calcul de la commande en boucle ouverte deux approches ont été utilisées : utilisation des méthodes issues de la théorie de la platitude d'une part et le couple pré-calculé en se fondant sur la connaissance du modèle rigide d'autre part. A niveau de performances comparable, on a pu conclure que :

- la compensation de la charge statique (dépendant cependant du point de fonctionnement) permet de diminuer la bande passante des correcteurs comparativement à l'absence d'anticipation,

- la compensation de la dynamique du mouvement contribue peu à l'amélioration des réponses obtenues.

La commande a porté sur l'évaluation de différentes structures et leur comparaison avec la commande d'axe utilisée actuellement. Cette étude a montré une meilleure efficacité de la commande par retour d'état qui dans une mise en œuvre en temps réel nécessite d'être complétée par un observateur. Dans le cas de la commande par retour d'état et observateur, nous avons montré que la robustesse de la loi de commande sera améliorée par l'utilisation d'une mesure d'accélération côté charge en complément de la mesure de position de l'arbre moteur.

Par ailleurs, dans le cadre de la conception du correcteur, l'approche de commande prédictive MPC a été implémentée en simulation dans le cadre d'une collaboration avec Cristina Stoica dans le cadre de ses travaux de thèse sur la robustification de lois de commande prédictives multivariables. Les résultats obtenus en termes de performances temporelles sont équivalentes aux performances de la commande par retour d'état LQ *(Stoica, Al Assad et al. 2008; Stoica, Al Assad et al. 2009).* Par ailleurs, en termes de marges de robustesse la commande LQ a montré des marges légèrement plus confortables (Annexe D).

Enfin, pour la mise en place d'une structure de commande multiaxe, la commande par retour d'état LQ sera ainsi retenue.

Chapitre IV

Méthodologie de commande multiaxe

Chapitre IV. Table des matières

1 Méthodologie de commande multiaxe

Dans ce chapitre, nous allons étendre la méthodologie de conception de la loi de commande présentée précédemment au cas multiaxe. A l'instar de la commande monoaxe, l'étude portera sur les trois actions de la loi de commande, à savoir, la génération de trajectoire, l'action d'anticipation et le correcteur (Figure 79). Au regard des résultats obtenus dans le chapitre III, seule la commande par retour d'état sera abordée dans ce chapitre.

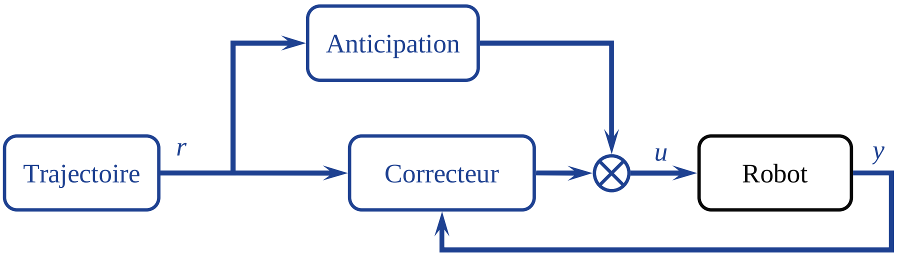


Figure 137: Schéma de régulation

Le passage à une approche de commande multiaxes devient nécessaire en raison des limites de la commande monoaxe à répondre à des performances très exigeantes dans le cas de systèmes fortement nonlinéaires et couplés, tels que les robots poly-articulés. En réalité, l'approche commande monoaxe est très pénalisante car elle ne prend pas en compte la variabilité de l'inertie ainsi que les effets de couplage dans le calcul de la commande. Par ailleurs, l'approche multiaxes devient indispensable lors de l'utilisation d'une motorisation directe ou d'une motorisation à faible rapport de réduction qui permettent d'obtenir des rendements plus importants mais accentuent les effets de couplage.

Dans ce cadre, nous allons étudier la conception de la loi de commande du modèle deux axes : Pivot-Carc du robot Innova Frontal. En effet, l'étude de ce modèle est très importante car la plupart des modalités proposées par le robot Innova requiert un mouvement simultané de ces deux axes (Chapitre I).

D'un point de vue applicatif, la mise en œuvre de l'approche multiaxes n'est pas actuellement possible sur le robot Innova car l'architecture matérielle, organisée autour d'une carte de commande MCB (Motion Control Board) ne permet qu'une commande axe par axe. Toutefois, une approche envisageable consistera à conserver sur la MCB l'implémentation du correcteur incluant les boucles rapides, c'est-à-dire, la boucle de courant, de vitesse et de position. Quant à la génération de trajectoire ainsi que l'action d'anticipation, considérées comme lentes, elles seront implémentées au niveau du superviseur.

1.1 Présentation du système à commander

Dans le cadre multiaxes, nous allons étudier la conception de la loi de commande du modèle deux axes : Pivot-Carc du robot Innova monoplan présenté dans le chapitre II (Figure 34).

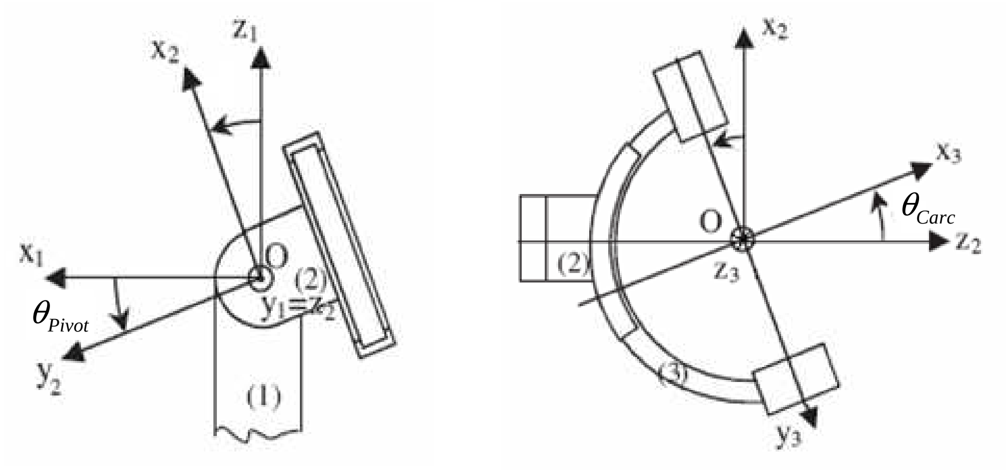


Figure 138 : Axes Pivot (gauche) et Carc (Droite) du robot Innova Frontal

Nous rappelons le modèle flexible associé au système Pivot-Carc, défini, tel que :

$$\mathbf{J}_m \cdot \ddot{q}_m + \mathbf{F}_v \cdot \dot{q}_m + \mathbf{K} \cdot (q_m - q) = \mathbf{\Gamma}_m \tag{93}$$

$$\mathbf{A}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{C}(q, \dot{q}) \cdot \dot{q} + \mathbf{Q}(q) + \mathbf{D} \cdot \dot{q} = \mathbf{K} \cdot (q_m - q) \tag{94}$$

où :

- $q = [\theta_{Pivot} \quad \theta_{Carc}]^T$ et $q_m = [\theta_{mPivot} \quad \theta_{mCarc}]^T$ sont respectivement les positions articulaires côté charge et moteur,
- $\mathbf{J}_m$, $\mathbf{F}_v$, $\mathbf{K}$ et $\mathbf{D}$ sont des matrices diagonales regroupant les paramètres caractéristiques des chaînes de motorisation de chaque axe : moment d'inertie de l'axe moteur, frottement visqueux, raideur et coefficients d'amortissement,
- $\mathbf{A}(q)$, $\mathbf{C}(q, \dot{q})$ et $\mathbf{Q}(q)$ sont respectivement la matrice d'inertie, la matrice des couples, des forces de Coriolis et des forces centrifuges et le vecteur des couples et des forces de gravité du modèle rigide.

$$\mathbf{A}(q) = \begin{bmatrix} ZZ_2 + XX_3\cos(\theta_3)^2 - 2XY_3\cos(\theta_3)\sin(\theta_3) & XZ_3\cos(\theta_3) - YZ_2\sin(\theta_3) \\ XZ_3\cos(\theta_3) - YZ_3\sin(\theta_3) & ZZ_3 \end{bmatrix} \tag{95}$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & \begin{matrix} -2*\cos(\theta_3)*\mathrm{XX}_3*\sin(\theta_3) \\ +2*\cos(2\theta_3)\text{^}2*\mathrm{XY}_3 \end{matrix} & -\sin(\theta_3)*\mathrm{XZ}_3 - \cos(\theta_3)*\mathrm{YZ}_3 \\ \begin{matrix} \cos(\theta_3)*\mathrm{XX}_3*\sin(\theta_3) \\ +\cos(2\theta_3)\text{^}2*\mathrm{XY}_3 \end{matrix} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_3^2 \end{bmatrix} \tag{96}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -g(MX_2\sin(\theta_2) + MY_2\cos(\theta_2)) - g\sin(\theta_2)(MX_3\sin(\theta_3) + MY_3\cos(\theta_3)) \\ -g\cos(\theta_2)(MX_3\sin(\theta_3) + MY_3\cos(\theta_3)) \end{bmatrix} \tag{97}$$

1.2 Objectifs de commande

Nous rappelons ici les objectifs de commande, identiques, au cas monoaxe. En effet, la loi de commande du système Pivot-Carc doit rejeter les modes résonnants dus à l'élasticité de la structure. De plus, elle doit répondre au cahier des charges suivant :

- Distance d'arrêt du tube, *Stop Distance* = 10 mm.
- Amplitude des vibrations de la chaîne image après 1 seconde, suite à la première oscillation, inférieure à 0,2 mm.
- Accélération maximale, définie telle que le tube s'arrête en moins de 10 mm pour une vitesse initiale de 20°/s.
- Courant maximal (pic de courant), $I_{\max} = 20\ \text{A}$.

Dans le cadre de cette étude, ces spécifications sont reformulées pour définir des objectifs d'asservissement par rapport aux variables d'état du système. En effet, comme le rayon du « Carc » est R=0,65 m (Chapitre II-figure 11), la distance d'arrêt et l'amplitude de la vibration ramenées à l'axe du Pivot et Carc sont :

- $\theta_{arrêt} = \dfrac{\text{Stop distance}}{\text{R}} = 0{,}0154\ \text{rad} = 0{,}8815°$
- $\theta_{vibration} = 0{,}019°$

Par ailleurs, la définition de l'accélération maximale implique que le temps de freinage est $t_{freinage} = 20/a_{\max}$, ainsi, $a_{\max} = 227°/s^2$.

Enfin, le couple maximal autorisé est : $\Gamma_{\max} = N \cdot K_t \cdot I_{\max} = 3100\ \text{Nm}$.

2 Méthodes de génération de trajectoire

Dans le cas monoaxe, nous avons étudié trois approches de génération de trajectoire, à savoir, la technique du filtrage passif, la génération de trajectoire par platitude ainsi que la technique de freinage en deux temps. Le but des ces approches est de générer des trajectoires de référence qui n'excitent par les modes de vibration du système et réduisant ainsi l'amplitude et la durée des vibrations résiduelles.

En partant de l'analyse présentée dans le chapitre précédent, il ressort que seule l'approche de génération de trajectoire par platitude peut formuler, dans un cadre multivariable, ce problème. En réalité, les techniques de filtrage passif ainsi que l'approche de freinage en deux temps sont des formulations valides essentiellement dans un contexte monovariable. Toutefois, ces approches peuvent être adaptées aux cas multivariables en y intégrant une mise à jour des paramètres en fonction de l'état du système. A titre d'exemple, la fréquence supprimée en utilisant un filtre coupe bande pourra être adaptée en fonction de la configuration du robot en se basant sur la variation de la fréquence propre de chaque axe.

Dans la suite, nous allons présenter la formulation de l'approche de la planification de trajectoire par platitude dans le cadre multivariable.

2.1 La technique de platitude

Dans le cas multivariable « MIMO », un système non-linéaire, $\dot{x} = f(x,u)$, est différentiellement plat s'il existe un vecteur $\mathbf{y}$ composé de m sorties fictives $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$, où m est la dimension de la commande, tel que :

- L'état $x(t)$ et la commande $u(t)$ s'expriment en fonction de $\mathbf{y}(t)$ et d'un nombre fini de ses dérivées (98) et (99).
- Le vecteur de sorties plates $\mathbf{y}(t)$ s'exprime en fonction de l'état $x(t)$, la commande $u(t)$ et un nombre fini de ses dérivées (100).

$$x = \Phi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \cdots, \mathbf{y}^{(r)}) \tag{98}$$

$$u = \Psi(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \ddot{\mathbf{y}}, \cdots, \mathbf{y}^{(q)}) \tag{99}$$

$$\mathbf{y} = h(x, u,\ \dot{u}, \ddot{u} ..., u^{(\gamma)}) \tag{100}$$

Dès lors, le problème de la planification de trajectoire par platitude reste le même que dans le cadre monovariable c'est-à-dire : étant donné le modèle dynamique d'un système $\dot{x} = f(x,u)$, existe-t-il h tel que :

$$\mathbf{y}(t) = h(x(t), u(t), \dot{u}(t), \ddot{u}(t), ..., u^{(\gamma)}(t)) \tag{101}$$

avec $\mathbf{y}(t) = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ fonction régulière du temps supposée donnée et $x(t), u(t)$ fonctions régulières du temps supposées inconnues.

Par exemple, le système MIMO (102) est plat car toutes les variables d'état et le vecteur de commande s'expriment en fonction de la sortie et de ses deux premières dérivées par rapport au temps (103).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_2 \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3 u_2 \\ \dot{x}_3 = x_1 u_1 \end{cases} \text{ avec comme sorties } \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \tag{102}$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = \dfrac{\dot{x}_2 - x_2}{u_2} = \dfrac{\dot{y}_2 - y_2}{\dot{y}_1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{\dot{x}_3}{x_1} = \dfrac{(\ddot{y}_2 - \dot{y}_2)\dot{y}_1 - (\dot{y}_2 - y_2)\ddot{y}_1}{\dot{y}_1^2 y_1} \\ u_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}_1 \end{cases} \tag{103}$$

2.1.1 Planification de trajectoires

Etant donnés l'instant initial t_i et les conditions initiales $x(t_i) = x_i$ et $u(t_i) = u_i$, et l'instant final t_f et les conditions finales $x(t_f) = x_f$ et $u(t_f) = u_f$, le problème de la planification de la trajectoire consiste à trouver une trajectoire $t \to (x(t), u(t))$ pour $t \in [t_i, t_f]$ qui vérifie $\dot{x} = f(x,u)$, ainsi que les conditionnes initiales et finales :

$$t_i : y_1(t_i),..., \dot{y}_1(t_i),..., y_m(t_i),..., y_m{}^{(r+1)}(t_i)$$

$$t_f : y_1(t_f),..., \dot{y}_1(t_f),..., y_m(t_f),..., y_m{}^{(r+1)}(t_f)$$

Comme dans le cadre monovariable, l'interpolation polynomiale se prête bien à l'élaboration d'une loi de mouvement ayant les caractéristiques souhaitées. Ainsi, il suffit de définir m polynômes $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$ chacun d'eux doit comporter au moins $2(r+2)$ coefficients pour satisfaire les conditions initiales et finales.

En posant :

$$T = t_f - t_i; \quad \tau(t) = \frac{t - t_i}{T},$$

la trajectoire de chaque sortie plate aura comme forme :

$$y_j(t) = \sum_{k=0}^{2r+3} a_{j,k} \tau^k(t) \tag{104}$$

avec $j = 1 \cdots m$.

Ainsi le problème de calcul de la trajectoire plate dans le cas multivariable, se ramène au cas monovariable, en prenant le calcul de chaque polynôme j indépendamment des autres (Chapitre II).

2.1.2 Application au système deux axes : Pivot-Carc du Robot Innova

Nous définissons la sortie plate du système telle que $\mathbf{y}(t) = q = [\theta_{Pivot} \quad \theta_{Carc}]^T$. Dès lors, pour vérifier que $\mathbf{y}(t)$ est bien une sortie plate, il suffit d'exprimer les variables d'état ainsi que la commande en fonction de celle-ci. En effet, à partir de la relation (94) nous avons :

$$q_m = q + \mathbf{K}^{-1} \cdot (\mathbf{A}(q) \cdot \ddot{q} + \mathbf{D} \cdot \dot{q} + \mathbf{H}(q, \dot{q})) \tag{105}$$

avec $\mathbf{H}(q,\dot{q}) = \mathbf{C}(q,\dot{q}) + \mathbf{Q}(q)$

Ce qui nous donne après dérivation :

$$\dot{q}_m = \dot{q} + \mathbf{K}^{-1} \cdot (\mathbf{A}(q) \cdot \dddot{q} + (\dot{\mathrm{A}}(\mathrm{q}) + \mathbf{D}) \cdot \ddot{q} + \dot{\mathbf{H}}(q, \dot{q})) \tag{106}$$

Par ailleurs, compte tenu de la relation (40), pour obtenir le couple de commande $\mathbf{\Gamma}_m$, il faut calculer $\ddot{q}_m$. On obtient ainsi :

$$\ddot{q}_m = \ddot{q} + \mathbf{K}^{-1} \cdot (\mathbf{A}(q) \cdot q^{(4)} + (2\dot{\mathbf{A}}(q) + \mathbf{D}) \cdot \dddot{q} + \ddot{\mathbf{A}}(q) \cdot \ddot{q} + \ddot{\mathbf{H}}(q, \dot{q})) \tag{107}$$

Enfin, comme $\mathbf{\Gamma}_m = \mathbf{J}_m \cdot \ddot{q}_m + \mathbf{F}_v \cdot \dot{q}_m + \mathbf{K} \cdot (q_m - q)$, nous aurons alors :

$$\mathbf{\Gamma}_m = \mathbf{J}_m \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{A}(q) \cdot q^{(4)} + \gamma(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dddot{q}) \tag{108}$$

avec :

$$\begin{aligned}\gamma(q, \dot{q}, \ddot{q}, \dddot{q}) = {} & (2\mathbf{J}_m\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{A}}(q) + \mathbf{F}_v\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}(q)) \cdot \dddot{q} \\ & + (\mathbf{J}_m + \mathbf{A}(q) + \mathbf{F}_v\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{A}}(q) + \mathbf{J}_m \cdot \ddot{\mathbf{A}}(q) + \mathbf{F}_v\mathbf{K}^{-1}\mathbf{D}) \cdot \ddot{q} \\ & + \mathbf{J}_m\mathbf{K}^{-1}\ddot{\mathbf{H}}(q, \dot{q}) + \mathbf{F}_v\mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{H}}(q, \dot{q}) + \mathbf{F}_v \cdot \dot{q} + \mathbf{H}(q, \dot{q})\end{aligned}$$

Sachant que la matrice de découplage $\mathbf{J}_m \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{A}(q)$ est toujours inversible (*Benallegue et Msirdi 2002*), nous avons réussi a construire la commande linéarisante du système.

En conclusion, la sortie choisie $\mathbf{y}(t) = q$ est bien une sortie plate du système car toutes les variables d'état du robot $X(t) = [\dot{q}_m \quad q_m \quad \dot{q} \quad q]^T$ ainsi que la commande $\mathbf{\Gamma}_m$ s'expriment en fonction de $\mathbf{y}(t)$ et de ses dérivées.

Une fois la sortie plate spécifiée la planification de la trajectoire peut se faire en utilisant la relation (104) pour chaque axe. L'interprétation des conditions initiales et finales ainsi que le choix du degré du polynôme peut se faire à l'identique du cas monovariable. Le lecteur peut se référer à la section (Chapitre III-2.2) pour plus de détails.

3 Les méthodologies d'anticipation

Dans le cadre multivariables, l'action d'anticipation ou « commande en boucle ouverte » peut se baser sur la connaissance *a priori* du modèle dynamique rigide ou flexible de la structure mécanique ainsi que la chaîne de motorisation *(Benallegue et Msirdi 2002; Kelly, Santibáñez et al. 2005).* Auquel cas, deux types d'actions sont envisageables, à savoir, une compensation de la dynamique rigide de mouvement en utilisant le couple pré-calculé (109), ou bien uniquement la compensation de la charge statique (110).

$$\mathbf{\Gamma}_a(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = (\mathbf{A} + \mathbf{J}_m) \cdot \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) + \mathbf{F}_v) \cdot \dot{\mathbf{q}}_i + \boldsymbol{\eta}_l \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \tag{109}$$

$$\mathbf{\Gamma}_a(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \boldsymbol{\eta}_l \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{q}) \tag{110}$$

Par ailleurs, la compensation de la dynamique des flexibilités peut être envisagée dans le cadre de la planification de trajectoire par platitude (2.1).

Toutefois, son expression obtenue dans le cas multivariable (108) est très complexe et devient d'un point de vue applicatif relativement difficile à réaliser.

4 Conception du correcteur

Dans le cadre monovariable, nous avons abordé trois approches de régulation, à savoir, la régulation en cascade, la commande par retour d'état LQ et la synthèse H_∞. Parmi ces dernières, la commande par retour d'état (LQ) avec action intégrale est potentiellement intéressante dans le cadre multivariable. De plus, cette méthode de synthèse utilise une démarche identique à celle du cas monovariable. Le lecteur pourra se référer à la partie (chapitre III-5.2) pour plus de détails.

Dans le cas du système multiaxes Pivot-Carc, les variables d'état sont :

$$X = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{m\_Pvt} & \dot{\theta}_{m\_Carc} & \theta_{m\_Pvt} & \theta_{m\_Carc} & \dot{\theta}_{Pvt} & \dot{\theta}_{Carc} & \theta_{Pvt} & \theta_{Carc} \end{bmatrix}^T$$

Les gains sont calculés pour le régulateur LQ en utilisant les matrices de pondération suivantes :

$$Q = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 10^2 & 10^2 & 5 & 5 & 10^2 & 10^2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } R = 10^{-10}$$

Ainsi, les gains de retour d'état obtenus sont :

$$k_{LQ} = \begin{bmatrix} 223270 & 2723 \\ -2723 & 223050 \\ 6407519 & 282864 \\ 133558 & 5852450 \\ 89964 & -5155 \\ -299 & 92708 \\ -4969036 & -280338 \\ -136311 & -4413743 \\ 99999 & 183 \\ -183 & 99999 \end{bmatrix}$$

4.1 *Evaluation des marges de stabilité*

Dans cette partie nous allons comparer la robustesse du système asservi Pivot-Carc par la commande retour d'état LQ avec l'approche de régulation en cascade implémenté actuellement. En effet, dans le cas d'un système multivariable, les critères classiques d'analyse des marges de stabilité tels que le critère de Nyquist ne sont plus valables et ne garantissent plus la robustesse du système. C'est pourquoi, nous allons baser l'étude de la robustesse sur l'analyse des valeurs singulières non structurées qui permet, dans le cas multivariable, de donner une évaluation significative de la robustesse du système asservi. Cette approche étant bien connue, pour plus de détails théoriques le lecteur pourra consulter *(Duc 1994; Duc et Font 1999).*

Dans un premier temps, nous allons effectuer l'analyse par la modélisation multiplicative directe. Auquel cas, les marges de stabilité sont évaluées comme suit :

– Pour la marge de gain, il y a stabilité pour tout i si :

$$1-\alpha_1 < k_i < 1+\alpha_1$$

– Pour la marge de phase, il y a stabilité pour tout i si :

$$\left|e^{j\varphi_i}-1\right| < \alpha_1 \Leftrightarrow \left|\varphi_i\right| < 2\mathrm{Arctan}(\alpha_1/2)$$

où α_1 est défini par $\alpha_1 = 1/\left\|(I+T_{BO}(s))^{-1}T_{BO}(s)\right\|_\infty$

Ensuite, nous réalisons l'analyse par modélisation multiplicative inverse. Dans ce cas nous avons :

– Pour la marge de gain, il y a stabilité pour tout i si :

$$\frac{1}{1-\alpha_2} < k_i < \frac{1}{1+\alpha_2}$$

– Pour la marge de phase, il y a stabilité pour tout i si :

$$\left|e^{-j\varphi_i}-1\right| < \alpha_2 \Leftrightarrow \left|\varphi_i\right| < 2\mathrm{Arctan}(\alpha_2/2)$$

où α_2 est défini par $\alpha_2 = 1/\left\|(I+T_{BO}(s))^{-1}\right\|_\infty$

Finalement, les marges de stabilité du système sont obtenues comme étant la réunion des deux marges directe et inverse. Le tableau 12 résume les marges de stabilité obtenues.

Régulation Cascade		**Commande LQ**	
Modélisation directe	Modélisation inverse	Modélisation directe	Modélisation inverse
$\alpha_1 = 0{,}978$	$\alpha_2 = 0{,}58$	$\alpha_1 = 0{,}977$	$\alpha_2 = 1$
$0{,}022 < k_i < 1{,}978$	$0{,}63 < k_i < 2{,}4$	$0{,}02 < k_i < 1{,}977$	$0{,}5 < k_i < \infty$
$\left\|\varphi_i\right\| < 58{,}5°$	$\left\|\varphi_i\right\| < 33{,}7°$	$\left\|\varphi_i\right\| < 58{,}5°$	$\left\|\varphi_i\right\| < 60°$

Tableau 12: Marges de stabilité du système Pivot-Carc asservi

Ainsi, pour la régulation en cascade, les marges garanties sont :

– marges de gain : $\left]0{,}022; 1{,}978\right[\cup \left]0{,}63; 2{,}4\right[= \left]0{,}022; 2{,}4\right[$

– marges de phase : $\pm 58{,}5° \cup 33{,}7° = \pm 58{,}5°$

Pour la synthèse LQ, les marges garanties sont :

- marges de gain : $\left]0{,}02;1{,}977\right[\cup \left]0{,}5;\infty\right[= \left]0{,}02;\infty\right[$

- marges de phase : $\pm 58{,}5° \cup 60° = \pm 60°$

Les marges de stabilité obtenues sont satisfaisantes pour les deux cas d'étude. Toutefois, la synthèse LQ conduit à des marges plus confortables ce qui était un résultat attendu compte tenu des propriétés de cette approche de commande.

Enfin, Il faut noter que l'évaluation des marges de stabilité obtenues dans cette étude ne représente pas la réalité de la robustesse du système qui peut être encore meilleure. En effet, l'utilisation des valeurs singulières non structurées constitue une première approche restrictive. Une manière d'obtenir une évaluation plus optimiste consiste à utiliser l'analyse de la valeur singulière structurée (μ-analyse).

4.2 Résultats en simulation sur le modèle nonlinéaire Pivot-Carc

La figure 139 montre l'évolution de la vitesse angulaire du Pivot et du Carc :

- en réponse à une consigne de −12°/s sur le Pivot et 10°/s sur le Carc,
- l'axe Pivot est soumis à une perturbation de couple de 200 Nm de $t = 3\,\text{s}$ à $t = 4\,\text{s}$ représentant une variation de la position du tube.

Ces courbes montrent :

- un bon degré d'amortissement de l'axe malgré la non utilisation du filtre coupe bande,
- un bon rejet de l'effet de couplage entre les axes,
- un bon comportement vis-à-vis de la variation du couple perturbateur,
- absence de vibrations tant en régime transitoire que permanent.

La figure 140 montre les commandes aux axes Pivot et Carc de la commande LQ. Par ailleurs, la figure 141 et la figure 142 montrent les résultats de la même simulation en utilisant une action d'anticipation comportant la compensation du couple de charge ainsi que la dynamique du mouvement rigide. Ces résultats montrent :

- que l'action de compensation de la dynamique du mouvement rigide a peu d'impact sur la réponse temporelle du système,
- une faible différence entre le couple de l'action d'anticipation et la commande totale du système, ce qui montre que l'action du correcteur est réduite, dans ce cas, uniquement au rejet des perturbations et à la correction des erreurs du modèle.

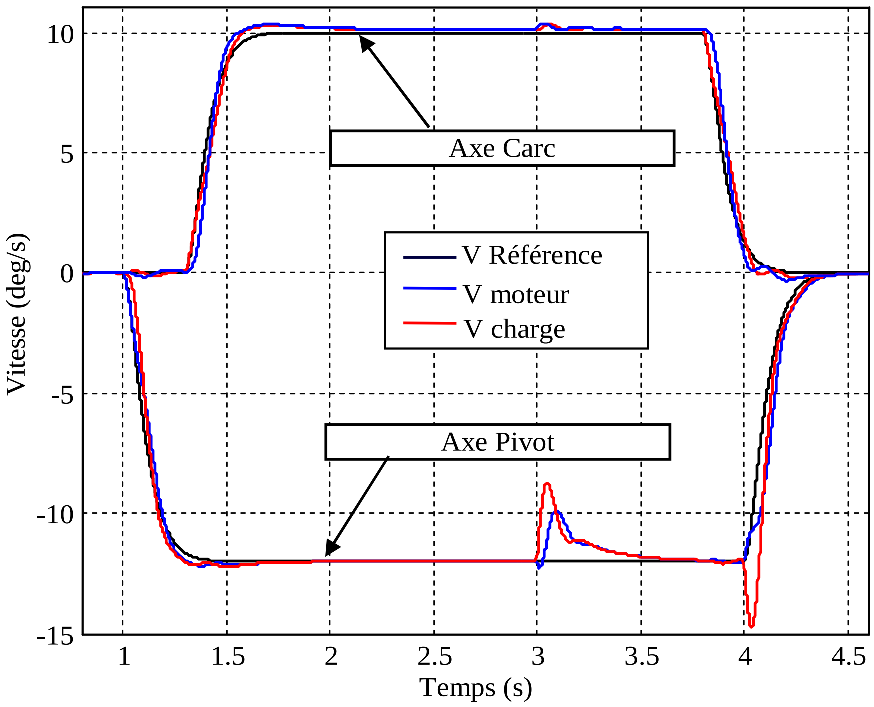


Figure 139: Réponse en vitesse des axes Pivot Carc

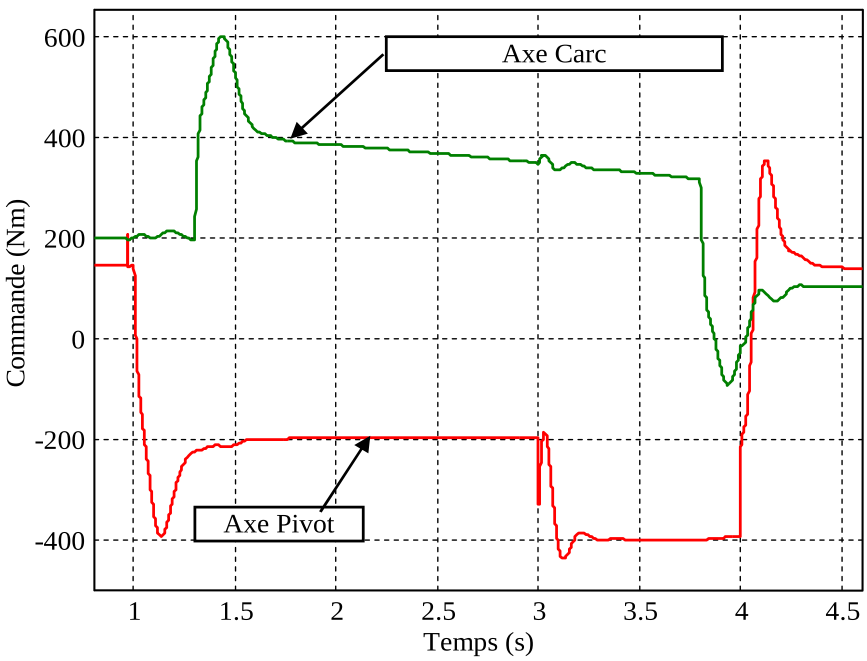


Figure 140 : Couple Moteur commande LQ

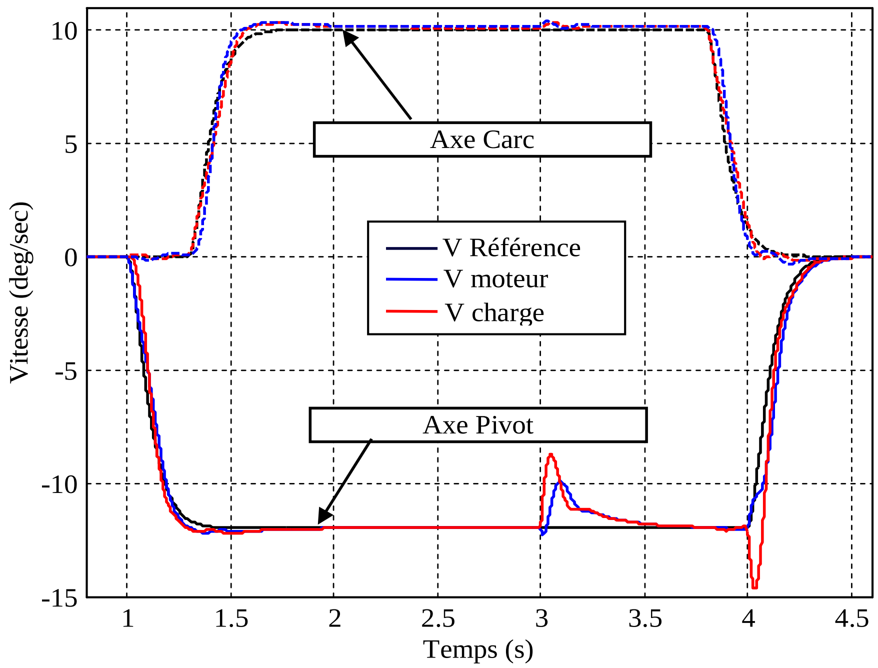


Figure 141 : Réponse en vitesse des axes :Pivot et Carc

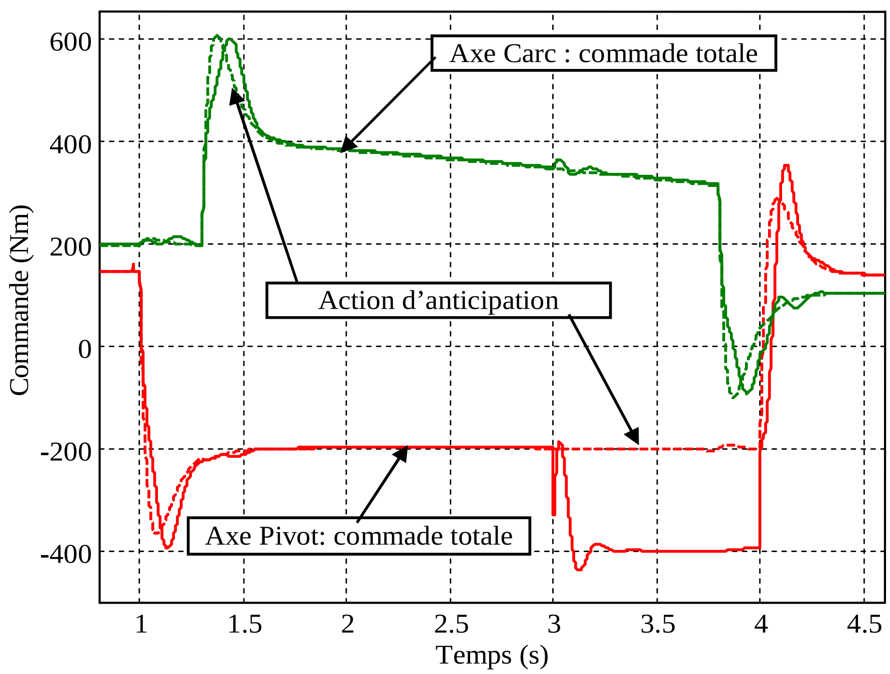


Figure 142 : Couple Moteur, commande LQ avec compensation de la dynamique rigide

5 Validation expérimentale

Les essais expérimentaux ont consisté à réaliser une trajectoire circulaire du détecteur autour d'un axe virtuel perpendiculaire à un plan (Figure 30). Cette trajectoire représente un cas réel d'utilisation du robot Innova pour la tomosynthèse[4]. La réalisation de ce mouvement implique des déplacements synchronisés des axes du Pivot et du Carc. Les consignes de référence nécessaires pour élaborer cette trajectoire sont données dans la figure 30, elles correspondent à des évolutions sinusoïdales, suivant le temps, des positions des deux axes.

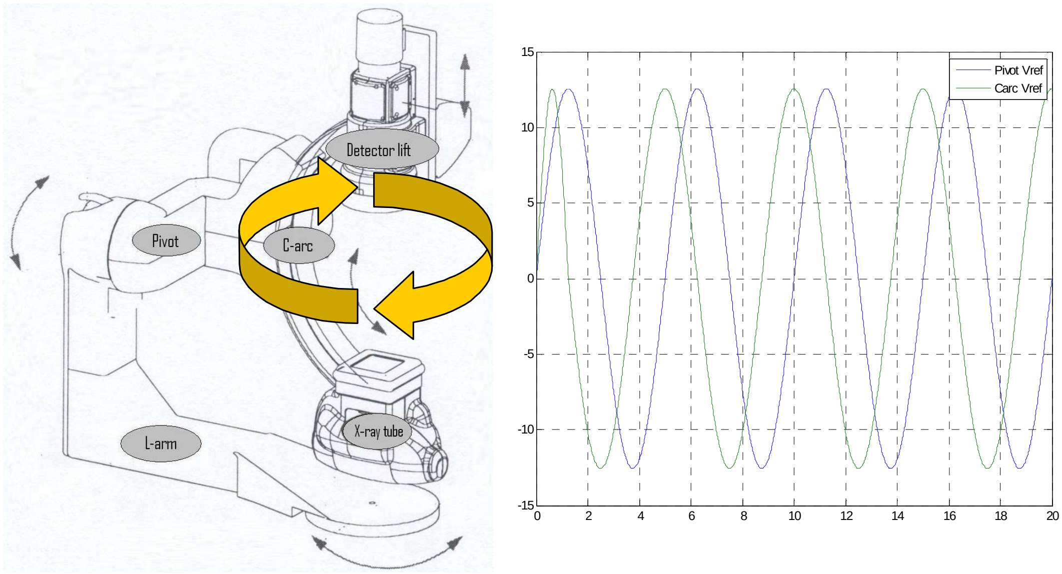


Figure 143 : Trajectoire circulaire, Robot Innova frontal

Les essais expérimentaux ont été basés sur une commande LQ avec action intégrale. Compte tenu de la configuration matérielle du robot Innova, un retour d'état partiel a été implémenté (retour sur vitesse $\dot{\theta}_m$ et position θ_m moteur uniquement). La figure 144 montre la réponse temporelle de l'axe Carc sans utilisation de l'action d'anticipation. La figure 146 montre la réponse avec action d'anticipation (compensation de la dynamique du mouvement et du couple de gravité). Les résultats expérimentaux montrent clairement que l'utilisation de l'action d'anticipation améliore la poursuite de trajectoire, en particulier, au passage de la vitesse nulle.

[4] Modalité de reconstruction 3D

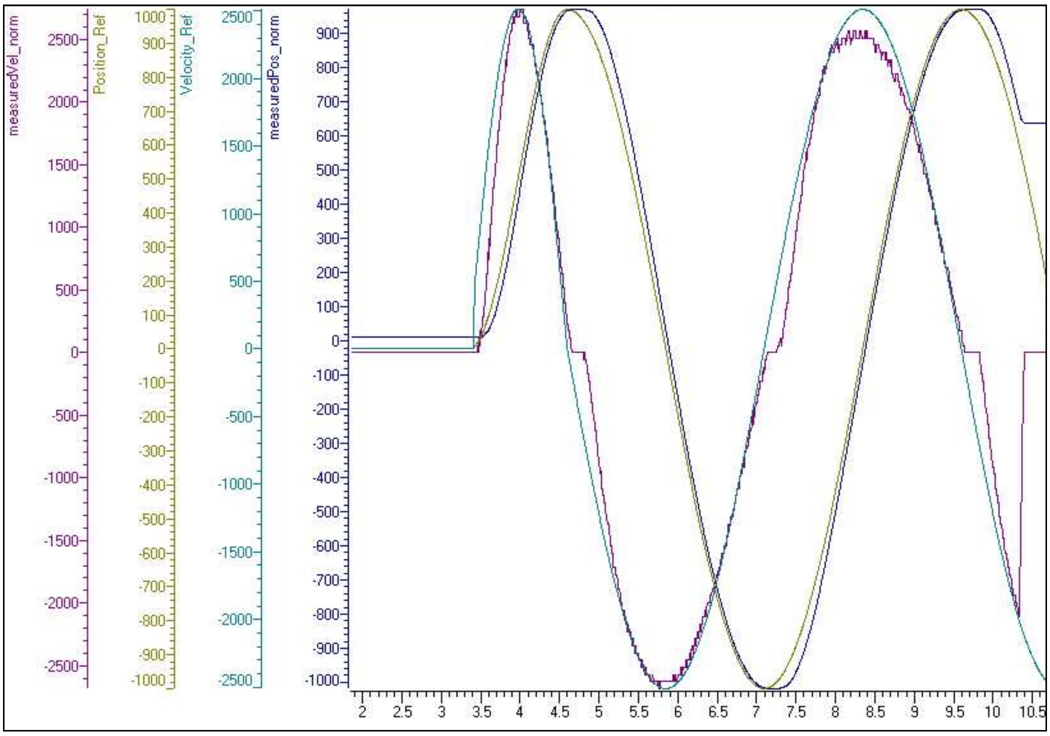


Figure 144: Réponse axe Carc sans action d'anticipation, trajectoire circulaire

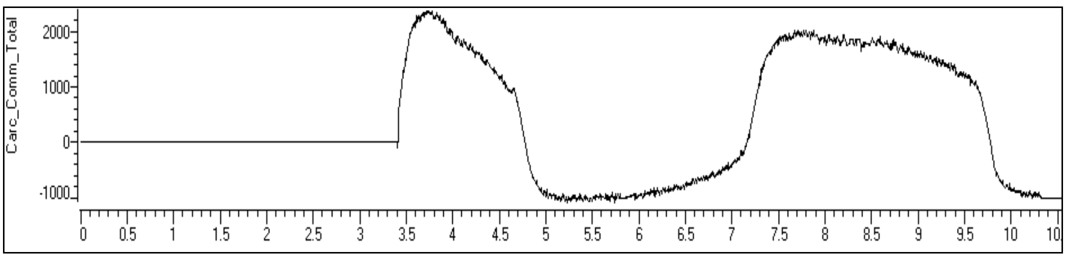


Figure 145: Commande : couple moteur axe Carc sans action anticipation

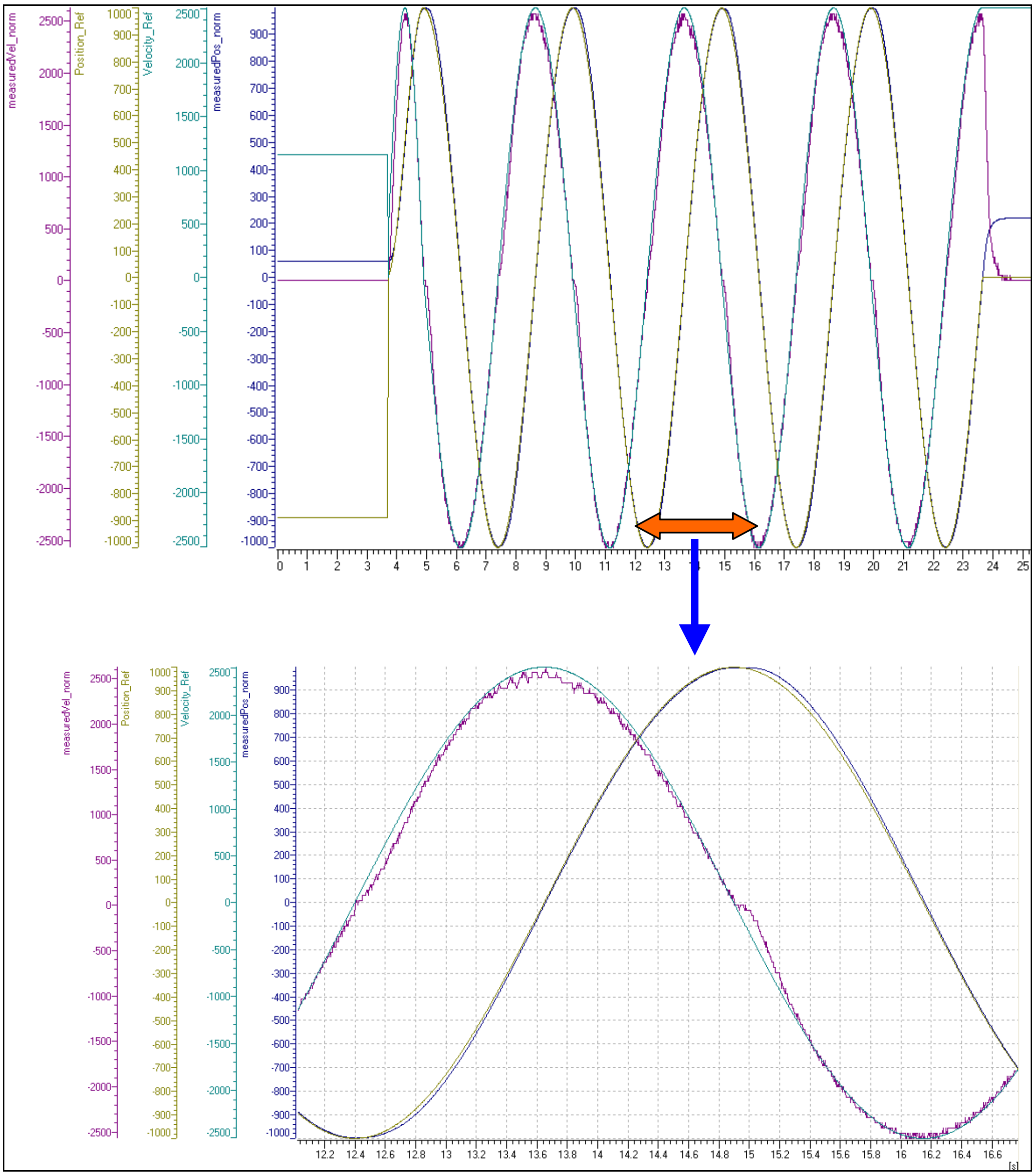


Figure 146 : Réponse axe Carc avec action d'anticipation, trajectoire circulaire

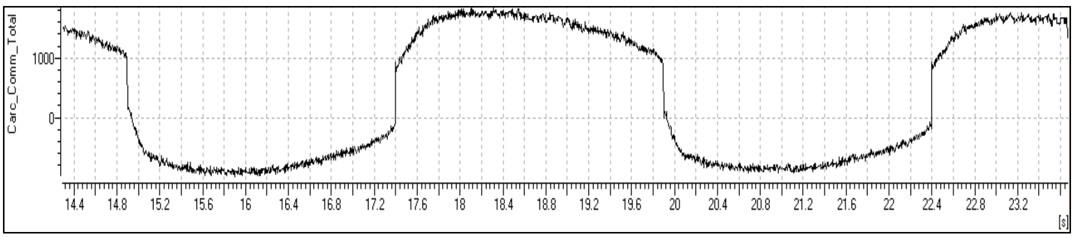


Figure 147: Commande : couple moteur axe Carc avec action anticipation

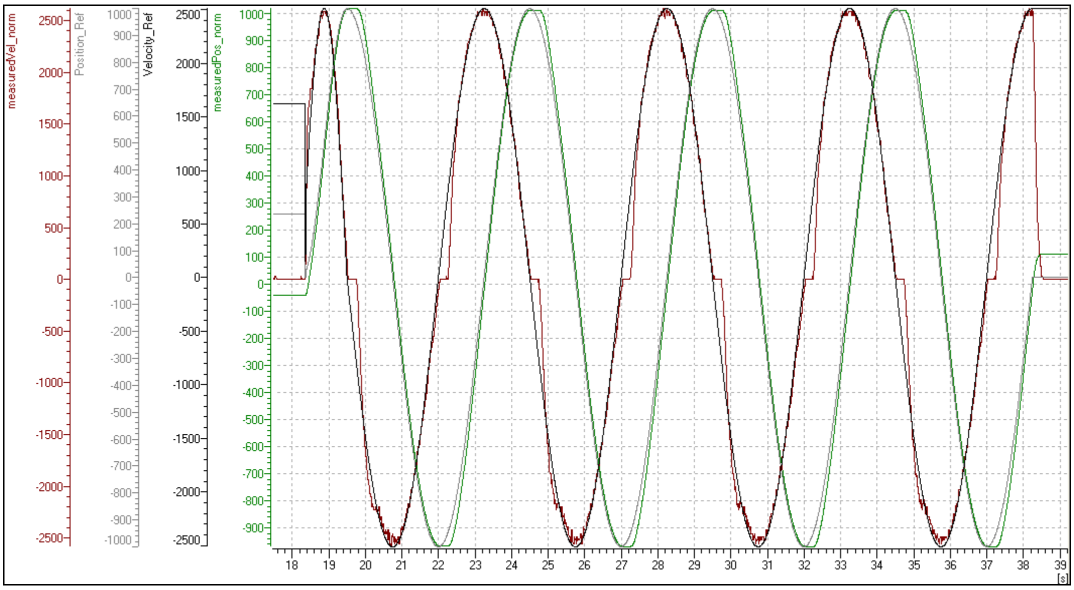


Figure 148: Réponse axes Pivot sans action d'anticipation, trajectoire circulaire

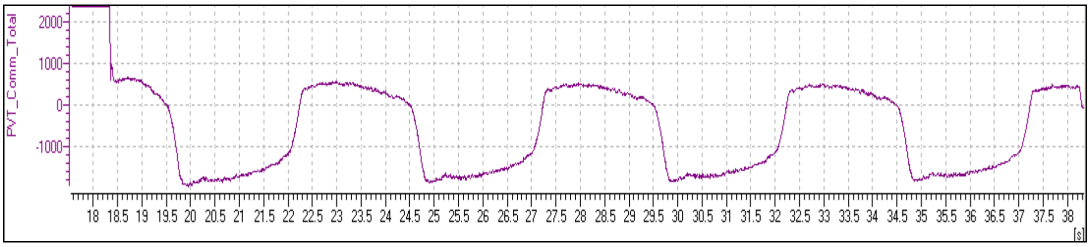


Figure 149: Commande : couple moteur axe Pivot

6 Conclusion

Dans ce chapitre, la commande du robot Innova a été abordée, sous l'aspect multiaxe, en utilisant une commande par retour d'état complétée par l'anticipation sur le couple de charge. La comparaison avec la commande actuelle fondée sur une structure de commande axe/axe de type cascade :

- a montré une meilleure robustesse de la commande multivariable
- l'amortissement des modes oscillants, cet amortissement ne peut être parfaitement réalisé avec des régulateurs P.I. qui nécessitent en conséquence l'utilisation de filtres coupe-bande supprimant, la fréquence propre du mode oscillant, dans le spectre de la consigne

La synthèse dans le cadre multiaxe a été effectuée par une approche de type LQ conduisant à des marges de stabilité/robustesse assez confortables.

Enfin, l’analyse de l’impact de l’anticipation a permis de mettre en évidence, tant en simulation non-linéaire qu’expérimentalement, que :

- la compensation de la charge statique, dépendant du point de fonctionnement, permet une diminution notable de l’erreur de poursuite et un meilleur comportement lors des passages à vitesse nulle,

- la compensation du couple dynamique a peu d’influence sur les performances.

En guise de conclusion, pour les implémentations futures nous conseillons d’utiliser une structure de commande fondée sur une synthèse multiaxe. Cette commande pourra être améliorée en ajoutant une anticipation sur le couple de charge statique.

Chapitre V

Conclusions et perspectives

Ces travaux de thèse se sont inscrits dans le cadre d'une collaboration industrielle avec GE Healthcare selon une convention CIFRE. Ce mémoire dégage deux grandes lignes qui ont motivé ce travail, à savoir :

- l'étude des méthodologies de modélisation des robots poly-articulés en vue d'établir un simulateur de robots d'imagerie médicale conçus et en cours de développement par GE Healthcare.

- l'étude des lois de commande dans le cadre de la réduction de vibrations au niveau de la chaîne d'image.

Nous dressons ici le bilan de cette étude et nous concluons avec les perspectives de travaux futurs.

Bilan des travaux

Une part importante des travaux de thèse à concerné la problématique de modélisation qui à porté en particulier sur deux aspects, d'une part établir un modèle pour la synthèse des lois de commande, d'autre part définir et d'élaborer un modèle complet incluant les souplesses de structure en vue de simuler le comportement réel des robots. La première phase de ce travail a permis de mettre en place un simulateur des robots Innova Frontal, Innova Latéral et le projet futur Agility.

Concernant la modélisation de la structure mécanique rigide, la méthodologie de modélisation a reposé principalement sur des théories issues de la discipline de la robotique : méthodes de Lagrange, Newton-Euler essentiellement adaptées à la robotique. La formalisation de cette méthodologie a permis de concevoir un outil de modélisation sous l'environnement Matlab/Simulink qui permet d'assister l'automaticien dans cette phase.

Les modèles rigides ainsi obtenus ont été enrichis dans une deuxième phase par l'introduction des flexibilités de la structure. Le choix de cette modélisation a été guidé à la fois par une modélisation fine de la structure élastique en utilisant une conception par éléments finis et par l'identification des souplesses à partir des mesures d'accélération sur la structure mécanique.

Par ailleurs, la modélisation des chaînes de motorisation a été étendue afin de tenir compte de l'irréversibilité de certains éléments de la transmission. La prise en compte de ce comportement s'est avérée très constructive, en particulier, pour le calcul du couple de compensation de la charge statique. En outre, l'introduction d'un modèle de l'irréversibilité des transmissions a permis d'obtenir un simulateur reproduisant les comportements réels de la chaîne de transmission. Ce qui a permis de valider expérimentalement le simulateur du robot Innova Frontal et Latéral.

Sur le plan de l'élaboration de la loi de commande, la démarche suivie a consisté à étudier les trois composantes principales, à savoir, la génération de trajectoire, l'action d'anticipation et le correcteur dans les cas monovariable et multivariable.

Nous avons pu démontrer dans cette étude que la génération de trajectoires est un élément critique lorsque la structure du régulateur ne prend pas en compte tous les états du système dans le calcul de la commande telle que l'architecture cascade. Dès lors, la trajectoire générée doit respecter un profil particulier notamment sans contenu fréquentiel pouvant exciter les modes propres du système. En revanche, la commande par retour d'état (synthèse LQ) permet de remédier à cet aspect grâce à la prise en compte de toutes les variables d'état du système dans la régulation, permettant ainsi l'amortissement « actif » des modes flexibles.

Un profil de freinage en deux temps a été proposé. Cette approche repose sur la connaissance *a priori* du comportement vibratoire du système. Auquel cas, le profil de freinage est exécuté en deux phases, la première étant une décélération classique de l'axe suivi d'un mouvement inverse permettent de dissiper l'énergie potentielle stockée dans l'élasticité. La validation expérimentale de cette approche sur l'axe Pivot du robot Innova a corroboré les résultats de simulation. La réduction de la durée des vibrations résiduelles était très significative comparée à un freinage direct. Toutefois, en comparaison avec un filtrage passif coupe bande, cette approche n'apporte pas une amélioration notable sur le plan de la réponse temporelle. Néanmoins, elle a montré une meilleure robustesse vis à vis des incertitudes paramétriques du système.

Une technique de génération de trajectoire fondée sur la théorie de platitude a également été étudiée dans le cas monoaxe et multiaxe. L'application de cette technique sur le cas monoaxe a montré des résultats intéressants en termes de suppression des vibrations sur le simulateur non linéaire de l'axe Pivot. En revanche, cette technique augmente rapidement en complexité dans le cas multivariable. C'est pourquoi, elle semble très pénalisante pour une mise en œuvre en temps réel, en particulier, sur des microcontrôleurs avec des faibles capacités de calcul.

L'étude de la boucle de régulation a porté sur trois concepts, à savoir, la structure cascade qui est la structure implémenté actuellement (commande axe/axe), le régulateur par retour d'état et la synthèse H_∞. Les conclusions de l'étude ont montré clairement un avantage de la commande par retour d'état comparée aux autres techniques sur le plan des performances temporelles ainsi que pour sa robustesse. Cependant il convient de nuancer cette conclusion dans le cas de la synthèse H_∞ la formulation étudiée ne comportant que la mesure de la position du moteur seule.

Du point de vue applicatif, ces travaux ont fourni une méthodologie de réglage et une approche structurée et formalisée dans un environnement industriel, afin d'améliorer les performances de la boucle de régulation actuelle du Robot Innova Frontal et Latéral. En outre, le régulateur par retour d'état avec compensation du couple statique a été implémenté en utilisant un retour d'état partiel. La raison principale de ce choix d'implémentation provient de la nature irréversible des chaînes de motorisation sur le robot Innova qui ne permet pas de voir l'effet de la flexibilité sur les variables côté moteur et en particulier le couple moteur, limitant ainsi la possibilité de reconstruire la sortie côté charge. Par ailleurs, une étude a été menée dans le but d'utiliser une mesure d'accélération de la charge. Bien que sur le plan théorique l'ajout de cette mesure ait fourni des résultats très intéressants pour l'estimation de la vitesse et la position de la charge, malheureusement, la mise en œuvre sur la structure de commande en temps réel actuelle (microcontrôleur) s'est avérée difficile en raison de la série de traitements numériques qui impliquent une charge de calcul importante et introduisent un retard d'estimation non négligeable, réduisant en conséquence l'intérêt de cette mesure avec la structure actuelle.

Perspectives et futurs travaux

Les travaux importants effectués sur la modélisation des robots ont permis la mise en place des simulateurs des robots Innova Frontal, Lateral ainsi qu'Agility. Les outils développés sont relativement génériques et peuvent constituer le socle commun en vue de l'étude et la conception de lois de commande.

En effet, durant ce travail de thèse, la conception de la loi de commande s'est basée uniquement sur les flexibilités articulaires. L'étape suivante consistera à évaluer l'applicabilité de ces techniques pour la commande des autres modes de vibrations structurelles et envisager une implémentation complète en temps réel des commande multiaxes.

Parmi les perspectives futures, nous pouvons encore envisager le problème de l'implémentation en temps réel des mesures d'accélération (dans une perspective de développement) mais aussi de l'intégration de nouveaux capteurs gyroscopiques.

Du point de vue de la commande, le travail sur la mise en œuvre en temps réel des générations de trajectoires fondées sur l'approche de la platitude offre des perspectives intéressantes. Par ailleurs la formulation LPV du modèle de l'axe du Pivot pourrait être une ouverture en vue de réaliser une commande adaptée à la trajectoire.

Annexes

Annexe A

Outil d’aide à la conception automatisée d’un robot

Annexe A. Table des matières

Cette annexe décrit les fonctionnalités de l'outil d'aide à la conception de modèles de robot à partir : des représentations géométrique et dynamiques, de la structure ainsi que de la description des chaînes de motorisation *(Al Assad, Godoy et al. 2008).*

Cet outil comporte en particulier une bibliothèque de modèles élémentaires, dans un environnement Matlab-Simulink, pour les différentes composantes du robot.

7 Interface

7.1 Fenêtre d'accueil

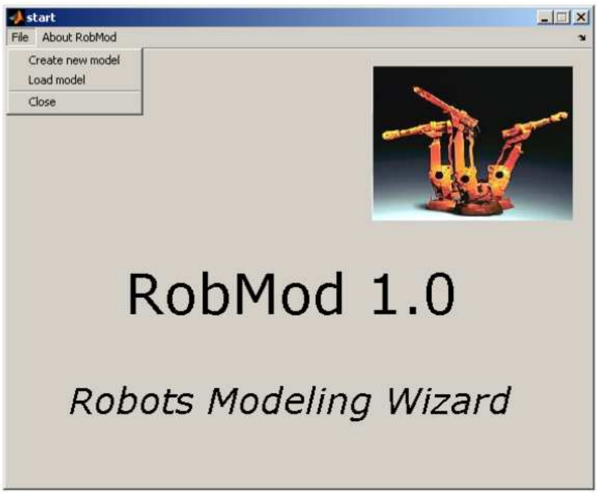


Figure 150: Fenêtre d'acceuil

La fenêtre d'accueil (Figure 150) permet à l'utilisateur de créer un nouveau modèle ou bien modifier un modèle existant.

7.2 Modèle dynamique du gantry

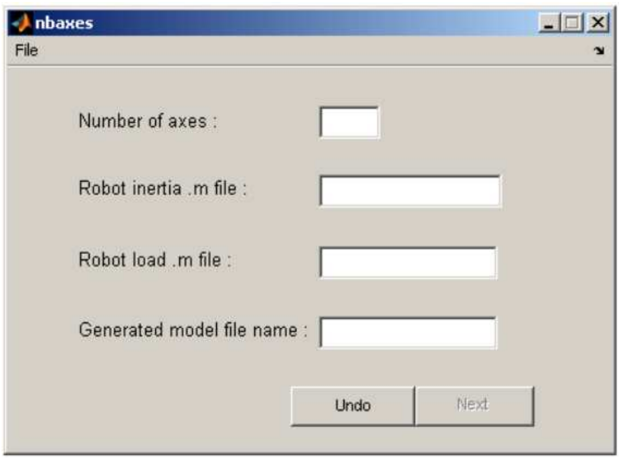


Figure 151 : Interface des paramètres dynamiques

La deuxième fenêtre de l'assistant graphique permet de spécifier les fonctions décrivant l'inertie du robot ainsi que de sa charge. Ces derniers sont générés automatiquement avec le script "the dynamic model generator". Finalement, l'utilisateur définit le fichier de sortie qui va résumer tous les paramètres du modèle (Figure 151).

7.3 Paramétrage des chaînes de motorisation

Durant cette étape (Figure 152), l'utilisateur spécifie successivement le nom chaque axe et configure les composants de la chaîne de motorisation associés à cet axe comme par exemple le modèle de frottement (Figure 154) ou encore les caractéristiques de la transmission (Figure 153). Les options disponibles actuellement sont résumées dans le tableau 13.

Eléments	Options
Motor	DC motor
	Brushless motor
Transmission	Rigid transmission
	Flexible transmission
Friction	Static+Coulomb+Viscous model
	Stribeck Model
	Karnopp Model

Tableau 13: Option de configuration de la chaîne de motorisation

Trois modèles de frottements ont été prévus (c.f. chapitre 2). Le premier étant issu directement du modèle de Coulomb et incorporant de plus le couple de frottement statique et le coefficient de frottement visqueux, le deuxième un modèle de type Stribeck permettant de mieux caractériser le frottement aux faibles vitesses et enfin le troisième est un modèle de Karnopp permettant d'éviter les discontinuités autour de la vitesse nulle des deux premiers modèles.

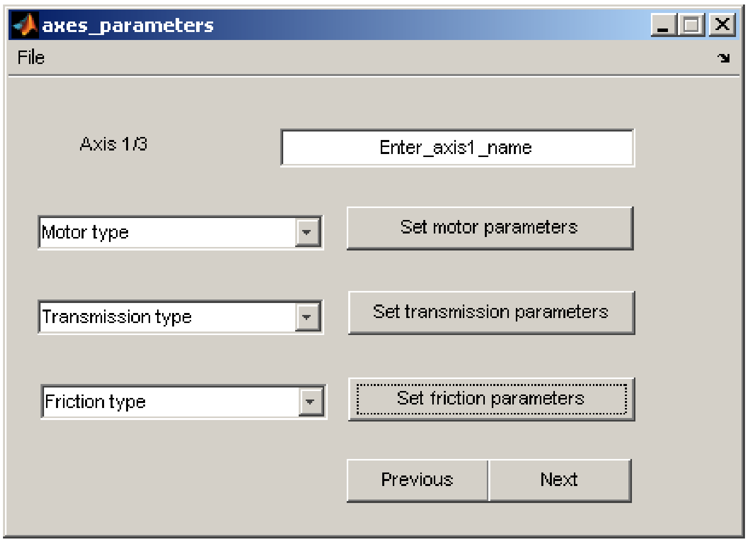


Figure 152: Paramétrage de la chaine de motorisation

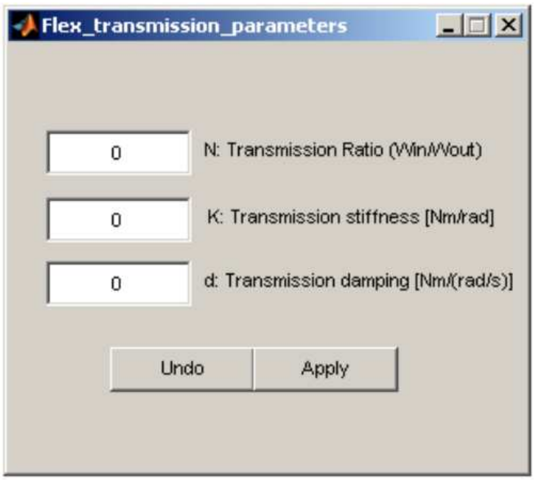


Figure 153: Paramètres de flexibilités

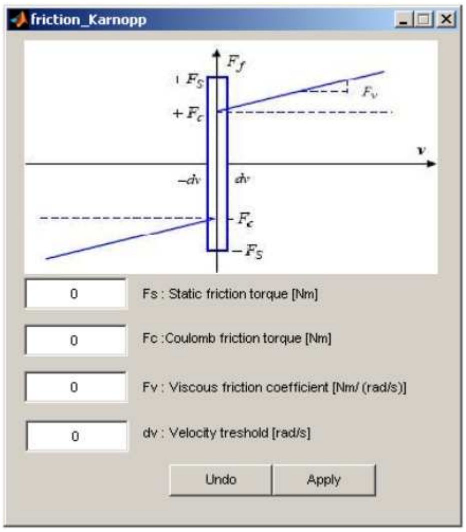


Figure 154: Modèle de frottement de Karnopp

8 Génération du modèle Simulink

Les paramètres du modèle étant renseignés, le modèle Simulink est généré automatiquement d'une manière transparente pour l'utilisateur. Le module de génération de Simulink utilise les commandes de Matlab de génération de modèle dont les principales fonctions sont résumées dans le tableau suivant :

add_block	Création du bloc Simulink
set_param	Configuration des paramètres du bloc
get_param	Récupération des paramètres du bloc
add_line	Ajout des signaux entres les blocs

Tableau 14 : Fonctions utilisées pour le générateur du modèle Simulink

8.1 Bibliothèque robotique

La génération du modèle Simulink nécessite l'utilisation de modèles spécifiques pour les différents composants de la chaîne de motorisation. Dans cet objectif une bibliothèque de modèles a été développée spécifiquement pour l'application « RobMod » (Figure 155). Elle inclut en particulier les modèles des moteurs, des frottements et des réducteurs.

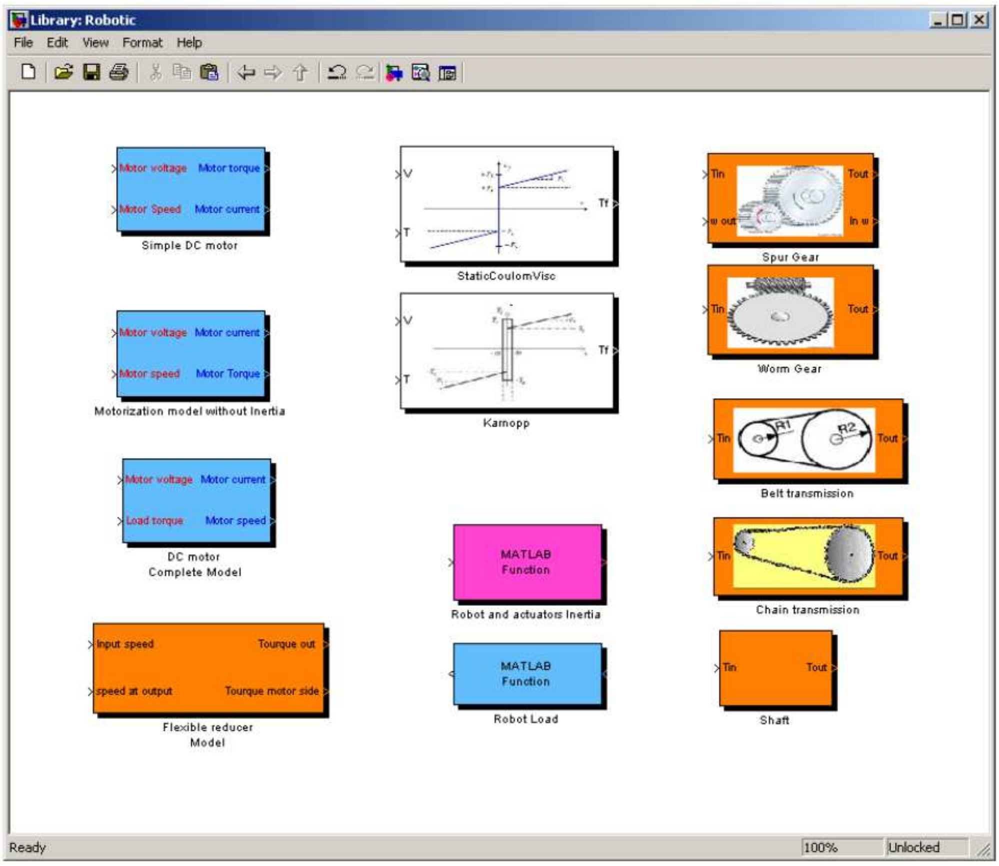


Figure 155: La librairie robotique

8.2 Modèle Simulink du robot

Le logiciel « RobMod » génère un ensemble de fichiers pour la simulation contenant :

- Le schéma de simulation dont l'organisation est donnée par la figure 156.
- Les fichiers du modèle dynamique

Ces fichiers sont utilisés pour la simulation du mouvement. Ils sont incorporés dans les blocs « Robot and actuators inertia » et « Robot Load » du modèle Simulink (Figure 157). Ces derniers permettent de calculer :

- les accélérations angulaires à partir des couples appliquées et de la charge function qpp =robInert(T,q)
- le couple de charge en fonction de la vitesse et de la position du robot function Tload =robLoad(qp,q)

- Le fichier d'initialisation

Ce fichier contient les paramètres de la structure du robot ainsi que la chaîne de motorisation. Ce fichier est défini d'une manière standardisée afin de permettre sa modification via le logiciel « RobMod »

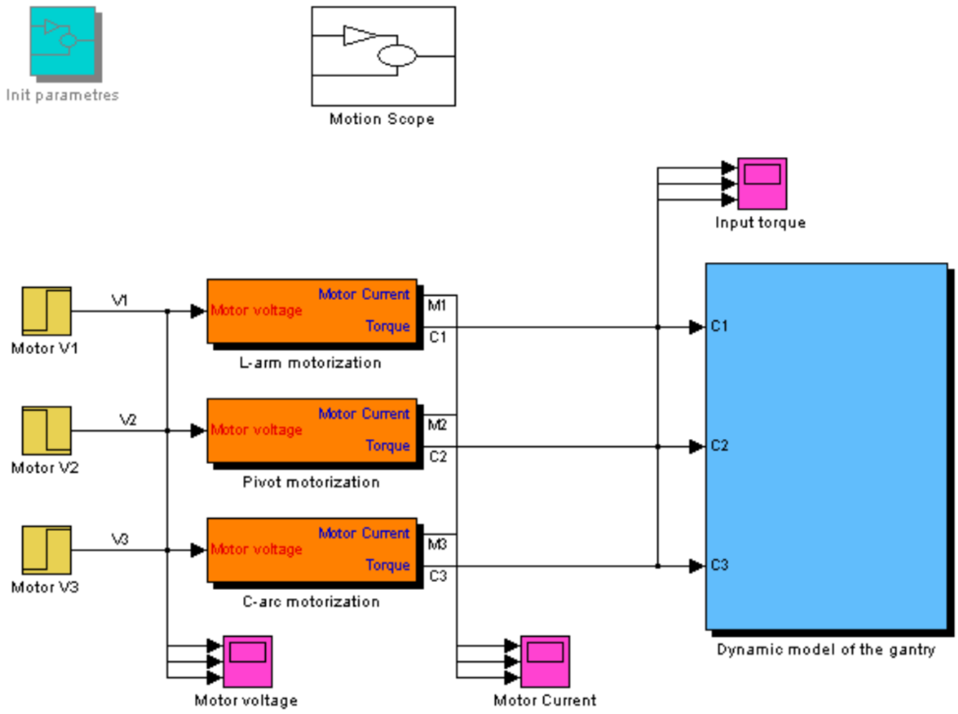


Figure 156: le modèle Simulink du robot

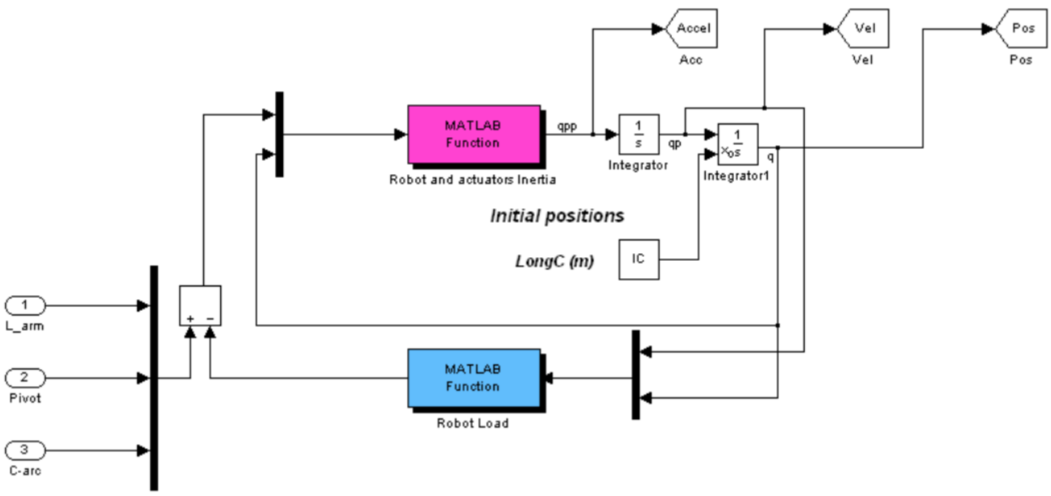


Figure 157: le modèle dynamique inverse du robot

Annexe B

Eléments sur les transformations homogènes

Dans cette annexe les matrices de transformations homogènes et les coordonnées homogènes sont présentées. L'utilisation des coordonnées homogènes permet de réaliser toutes les opérations de transformation à l'aide d'un seul opérateur : la multiplication matricielle. Cela facilite le développement d'opérations composées et le développement des modèles géométriques des robots manipulateurs.

En coordonnées homogènes, le point de coordonnées cartésiennes $[x \quad y \quad z]^T$ est représenté par $[x \quad y \quad z \quad 1]^T$. Par ailleurs, une orientation $[u \quad v \quad w]^T$ est représentée par $[u \quad v \quad w \quad 0]^T$. De cette façon, les translations ne sont pas appliquées aux vecteurs d'orientation.

En coordonnée homogènes, les matrices de transformation sont définies, telles que :

- **Translations**

Une translation de $[a \quad b \quad c]^T$ est donnée par :

$$\mathrm{Trans}(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Une translation d le long d'un seul axe $\mathbf{u}$ peut être notée $\mathrm{Trans}(\mathbf{u}, d)$. En conséquence, une translation pourra être décomposée telle que :

$$\mathrm{Trans}(a,b,c) = \mathrm{Trans}(\mathbf{x}, a) \cdot \mathrm{Trans}(\mathbf{y}, b) \cdot \mathrm{Trans}(\mathbf{z}, c)$$

Il faut noter que la multiplication des matrices de translation est commutative ainsi l'ordre de multiplication n'est pas important.

- **Rotations**

Les matrices de rotation sont définies en coordonnées homogènes telles que :

  - Une rotation θ autour de l'axe $\mathbf{x}$

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{x}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Une rotation θ autour de l'axe $\mathbf{y}$

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{y},\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

- Une rotation θ autour de l'axe $\mathbf{z}$

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{z},\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

En cordonnées homogènes, une transformation est définie comme une produit de matrices de rotation et de translation, tel que :

$$^{k}T_{j}=\mathrm{Rot}(\mathbf{x},\alpha)\cdot\mathrm{Rot}(\mathbf{y},\beta)\cdot\mathrm{Rot}(\mathbf{z},\gamma)\cdot\mathrm{Trans}(a,b,c)=\begin{bmatrix}\left({}^{k}\mathbf{R}_{j}\right)_{3\times3} & \left({}^{k}\mathbf{P}_{j}\right)_{3\times1}\\ 0_{1\times3} & 1\end{bmatrix}$$

avec :

– ${}^{k}\mathbf{R}_{j}$ la matrice de rotation qui définit l'orientation du repère R_{j} par rapport à R_{k}

– ${}^{k}\mathbf{P}_{j}$ le vecteur de position qui définit la translation du repère R_{j} par rapport à R_{k}

Ainsi, l'expression du point $\mathbf{p}_{j}\in\mathrm{R}_{j}$ dans le repère R_{k} est donnée par : $\mathbf{p}_{k}={}^{k}T_{j}\cdot\mathbf{p}_{j}$.

Annexe C

Mesures d'accélération

Un des problèmes dans la mise en œuvre de lois de commandes évoluées de type retour d'état est celui des mesures disponibles. Les mesures actuellement disponibles sont effectuées sur l'arbre moteur ce qui conduit à une dégradation des marges de robustesse induites par la mise en place d'un estimateur nécessaire à la reconstruction de l'état. Cette dégradation est ici amplifiée par la présence de modes souples mal amortis. La mesure directe de la position du tube dans un repère absolu est difficile, aussi en vue d'enrichir les mesures disponibles et reconstituer la position du tube dans un repère absolu un accéléromètre a été installé sur le tube[*].

L'objectif est d'évaluer l'amélioration des performances avec cette mesure supplémentaire. Une retombée complémentaire de cette étude a été la validation des fréquences propres dues à la souplesse de la structure.

Le dispositif expérimental est constitué de deux cartes équipées d'accéléromètre trois axes. Ces dernières communiquent entre elles via une liaison sans fil utilisant le protocole « ZigBee ». Enfin, la mesure d'accélération est envoyée à la carte de commande via une liaison série RS-232 (Figure 158).

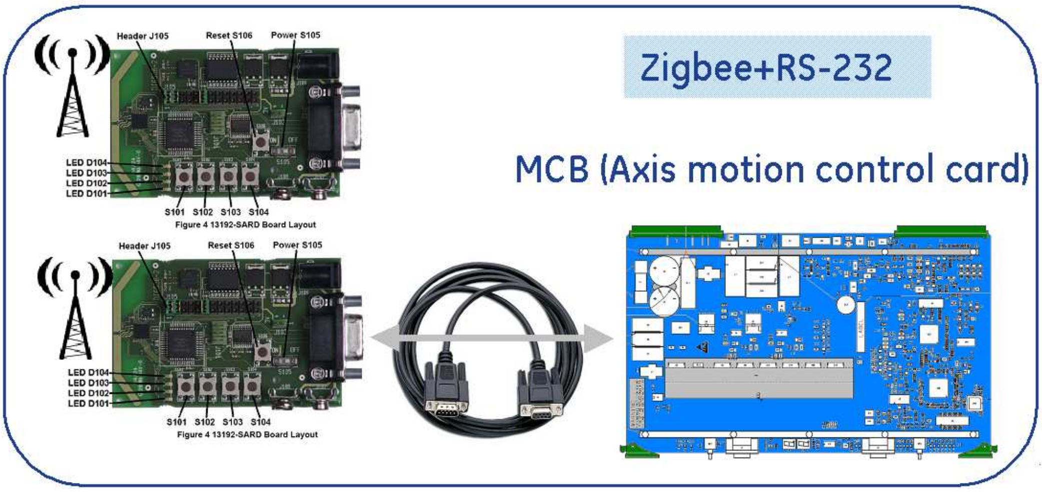


Figure 158 : Dispositif de mesure de l'accélération

Ce dispositif a été implémenté sur le robot Innova frontal afin de mesurer l'accélération directement côté charge, i.e. sur le tube et le détecteur (Figure 159).

[*] Cette étude a été menée avec Jordi Battle Porto (étudiant de Supélec) lors de son stage de fin d'études.

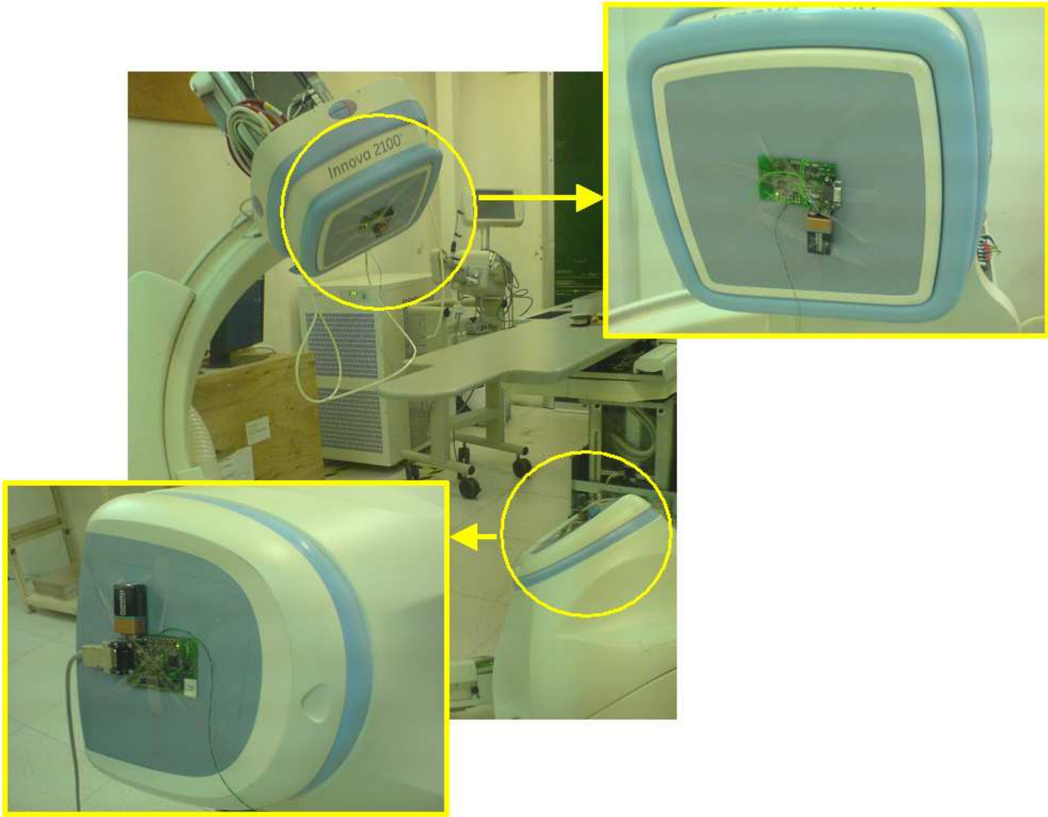


Figure 159 : mesure de l'accélération sur le robot Innova frontal

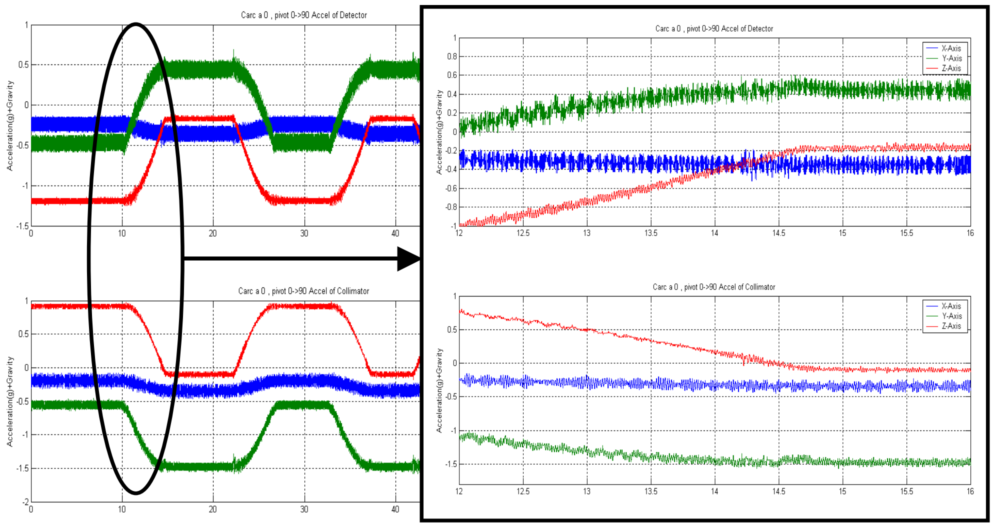


Figure 160 : Mesure d'accélération, freinage en mode normal (relâchement de la manette de commande), $V_{init} = 10° / s$

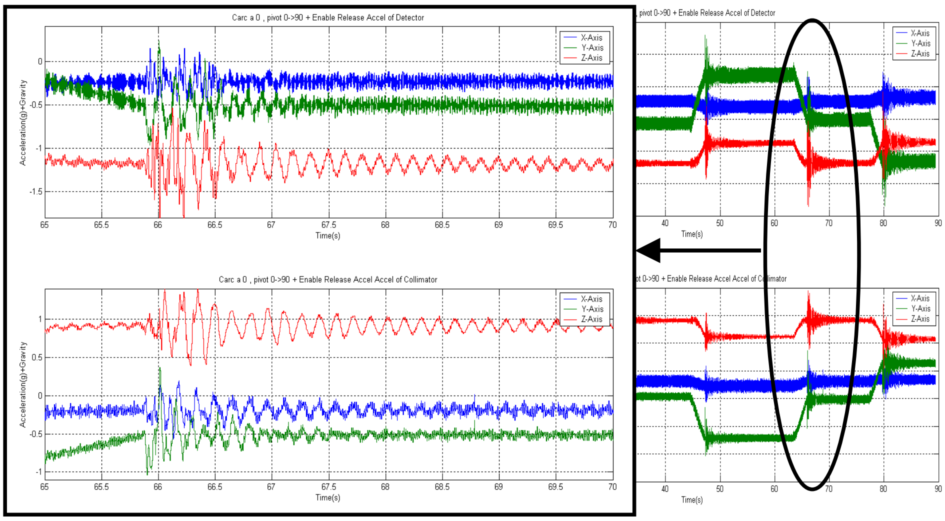


Figure 161: Mesure d'accélération, Arrêt d'urgence, $V_{init} = 10° / s$

La reconstruction de la mesure d'accélération de l'axe Pivot, $Y = [\omega_m \quad \theta_m \quad \dot{\omega}]^T$, à partir des mesures brutes de l'accélération du tube $(\ddot{x}_{tube}, \ddot{y}_{tube}, \ddot{z}_{tube})$ ou celle du détecteur $(\ddot{x}_{\det}, \ddot{y}_{\det}, \ddot{z}_{\det})$ nécessite une série de traitements préalables des grandeurs mesurées, à savoir : la mise à l'échelle, un filtrage passe-bas des bruits, un filtrage passe-haut pour la suppression du biais du capteur et la reconstruction de l'amplitude de l'accélération en fonction de la position de l'axe Carc (Figure 114).

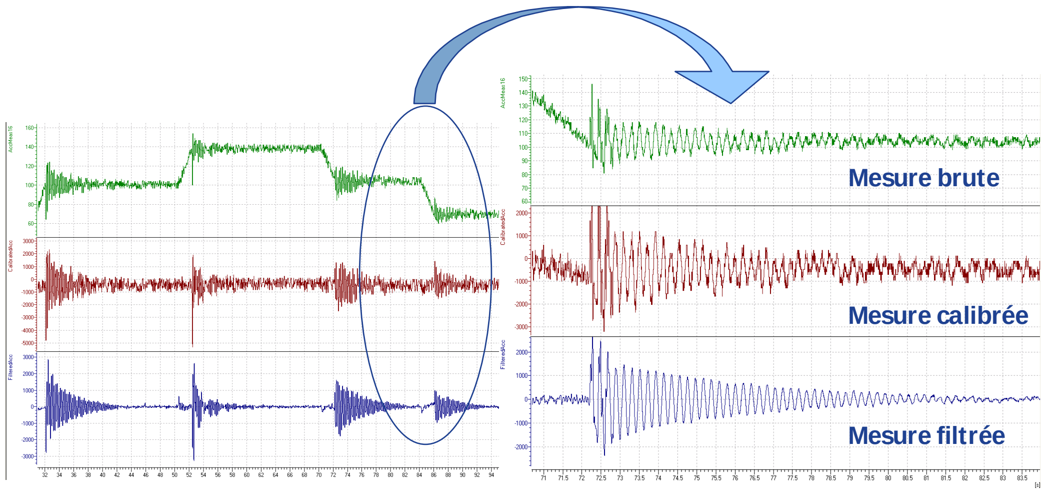


Figure 162: Traitement du signal de l'accélération

Annexe D

Control of a flexible arm by mean of robustified MPC*

* Article accepté pour communication dans la conférence : « European Control Conference 2009»

Control of a flexible arm by mean of robustified MPC

C. Stoica, *Member IEEE,* O. Al Assad, P. Rodríguez-Ayerbe, E. Godoy and D. Dumur, *Member IEEE*

Abstract—**This paper proposes the application of advanced control techniques to the main axis movement of a 4-axis strongly non-linear cardiovascular robot, more precisely a flexible arm. Measurements are taken on the motor shaft, consequently involving difficulties on the control of the load because of the flexibility of the mechanical chain. Two advanced control strategies are further compared: an off-line robustified Model Predictive Control (MPC) technique and a state-feedback linear quadratic (LQ) control. The LQ controller is designed in order to damp the resonant modes due to flexible mechanical structure. Its robust stability is a posteriori verified. The robust stability under both unstructured and polytopic uncertainties is explicitly considered in the robustified MPC synthesis.**

I. Introduction

Usually, robots are complex multivariable non-linear systems, with possible strong interaction between their input/output (I/O) channels. Modeling procedures for robots [1] can be sometimes complicated, leading to sophisticated models. Besides, accurate models are difficult to find. Due to its simplicity, performances and generality, Model Predictive Control (MPC) [2] can be an appropriate choice, in particular in robotics. Neglected or poorly known dynamics, estimation errors of models identified from measured data or uncertain parameters can affect the performance of the controlled robots. In this direction, this paper focuses on the application of robustified predictive control techniques to a medical robot, which is a complex multivariable non-linear strongly-coupled system.

In order to explicitly guarantee robust stability under both unstructured and structured uncertainties, an off-line robustification procedure of an initial MPC controller is proposed. This robustification method is based on the optimization of a Youla-Kučera parameter, also known as the **Q** parameter. Addressing the robust stability under unstructured uncertainties leads to a convex optimization problem, solved with LMI (Linear Matrix Inequality) tools. In order to guarantee the stability over a specified uncertain polytopic domain, a BMI (Bilinear Matrix Inequality) condition must be satisfied for every vertex of the polytope. Optimization problems subject to BMI constraints are hard problems because of the loss of convexity. In order to overcome these difficulties, a tractable sub-optimal solution [3] is proposed here.

The proposed approach is an alternative to the current control structure based on a LQ regulator. In this paper, these two control strategies are applied on a medical robot and an analysis of the results is further detailed.

This paper is organized as follows. Section II describes the medical robot, offering a model for the pivot axis of the robot. Then, Sections III and IV deal with control strategies applied on this pivot. Hence, Section III proposes a LQ control, while Section IV offers some details on designing a robustified MPC law that explicitly guarantees the robust stability under both unstructured and polytopic uncertainties. Section V mainly focuses on an analysis of the results obtained with the proposed control laws. Finally, some concluding remarks and perspectives are given in Section VI.

II. Description of the Application

The Innova cardiovascular robot (Fig. 1), developed by General Electric Healthcare, is used for medical X-ray imaging.

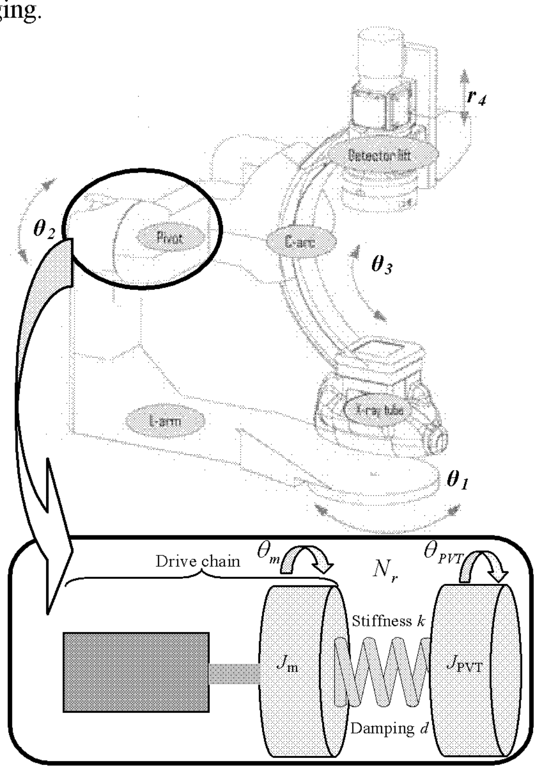


Fig. 1. Two-mass spring pivot model of the Innova Robot

It is a 4−degree of freedom open-chain robot composed of the following links: L-arm (revolute joint), a pivot (revolute joint), a C-arc (which can be considered as a revolute joint around a virtual axis crossing the C-arc center) and a lift (prismatic joint). Each joint is driven using a DC motor. The

Manuscript received October 31, 2008.

O. Al Assad is with GE Healthcare, 283 rue de la Minière, F-78530 Buc Cedex, France (e-mail: Omar.AlAssad@ge.com).

C. Stoica, P. Rodríguez-Ayerbe, D. Dumur and E. Godoy are with SUPELEC, 3 rue Joliot Curie, F-91192 Gif-sur-Yvette Cedex, France (phone: +33 1 69 85 13 72, e-mail: {cristina.stoica; pedro.rodriguez; didier.dumur; emmanuel.godoy}@supelec.fr).

detailed global model can be found in [4].

In this paper, the control of the pivot joint is studied to illustrate the developed strategies. The flexibility observed on the pivot structure is modeled as a two-mass spring system representing one vibrating mode (Fig. 1). The plant dynamics is given by the following equations:

$$J_{PVT}\ddot{\theta} + d\dot{\theta} + k(\theta - \theta_m) + \Gamma_l(\theta) = 0 \tag{1}$$

$$J_m\ddot{\theta}_m + f_v\dot{\theta}_m + k(\theta_m - \theta) = \Gamma_m \tag{2}$$

with J_{PVT} the pivot inertia, k the joint stiffness, d the joint damping, f_v the viscous friction, θ the joint position, θ_m the motor shaft position, Γ_m the motor torque and Γ_l the load torque.

The load torque function $\Gamma_l(\theta)$ is parameterized using two coefficients Γ_{l0} and θ_{offset} which depend on the C-arc and the lift position. Actually, the load torque is given by:

$$\Gamma_l(\theta) = \Gamma_{l0}\sin(\theta - \theta_{offset}) \tag{3}$$

A state vector of the pivot plant can be defined as $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\dot{\theta} & \dot{\theta}_m & \theta & \theta_m\end{bmatrix}^T$.

Usually, available sensors in robot arms can provide only the velocity and the position of the motor shaft. This makes the control of the load position difficult in case of badly damped flexible drive chain.

Summarizing all these aspects, the nonlinear model of the pivot can be represented in the following manner:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \Gamma_m) = \begin{bmatrix} -\dfrac{d}{J_{PVT}}\dot{\theta} - \dfrac{k}{J_{PVT}}(\theta - \theta_m) - \Gamma_l(\theta) \\ -\dfrac{f_v}{J_m}\dot{\theta}_m - \dfrac{k}{J_m}(\theta_m - \theta) + \Gamma_m \\ \dot{\theta} \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

For control design purposes, a linearized model is derived around an operating point θ_e. In fact, the bending mode is mainly excited during the beginning of the motion or during the braking. After linearizing the model around θ_e, the following expression is considered:

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{d}{J_{PVT}} & 0 & a_{13} & \dfrac{k}{J_{PVT}} \\ 0 & -\dfrac{f_v}{J_m} & \dfrac{k}{J_m} & -\dfrac{k}{J_m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\delta\Gamma_m \tag{5}$$

where :

$$a_{13} = -\frac{k}{J_{PVT}} - \frac{\Gamma_{l0}\sin(\theta_e - \theta_{offset})}{J_{PVT}}.$$

Since $k >> \Gamma_{l0}\sin(\theta_e - \theta_{offset})$, the plant can be approached by a continuous time LTI (Linear Time Invariant) state-space representation:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c\,\mathbf{x}(t) \end{cases} \tag{6}$$

with the following matrices:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} -\dfrac{d}{J_{PVT}} & 0 & -\dfrac{k}{J_{PVT}} & \dfrac{k}{J_{PVT}} \\ 0 & -\dfrac{f_v}{J_m} & \dfrac{k}{J_m} & -\dfrac{k}{J_m} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{J_m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

As the sensors on the pivot can provide only the angular velocity and position of the motor shaft, then the following $\mathbf{C}_c$ matrix should be considered:

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

It can be noticed that the dynamic model of the vibration is independent from the operating point.

III. State Feedback LQ Control

As a first control approach, currently implemented on the robot, a state feedback control scheme is considered, where the control signal for the state feedback is given by [5]:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}_{LQ}\mathbf{x}(t) \tag{9}$$

The control gain matrix $\mathbf{K}_{LQ}$ is calculated using a linear quadratic (LQ) optimization by minimizing the well known cost function:

$$J_1 = \int_0^\infty (\mathbf{x}(t)^T\mathbf{Q}_{J_1}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}_{J_1}\mathbf{u}(t))\,dt \tag{10}$$

where $\mathbf{Q}_{J_1}$ and $\mathbf{R}_{J_1}$ are positive definite symmetric weighting matrices with real coefficients, used as tuning parameters.

To achieve better static error rejection, an integral action on the position error $\int(\theta_m - \theta_r)\,dt = \int\varepsilon_\theta\,dt$ is added to the control scheme, leading to the following augmented state vector $\mathbf{x}_I = \begin{bmatrix}\dot{\theta} & \dot{\theta}_m & \theta & \theta_m & \int\varepsilon_\theta\end{bmatrix}^T$. Here θ_r denotes the motor shaft position set-point. Hence, the augmented representation used for the control law design is given by:

$$\mathbf{A}_I = \left[\begin{array}{c:c} \mathbf{A} & \mathbf{0}_{4,1} \\ \hdashline 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1 & 0 \end{array}\right], \mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Finally, since the pivot sensors do not provide all the states, an observer is incorporated into the control procedure in order to estimate the required state variables, in particular the variables describing the bending modes.

The results obtained while applying this controller on the pivot will be compared with the robustified MPC controller described in the next section.

IV. Off-line Robustified MPC via Q Parametrization

This Section presents the theoretical aspects of the off-line robustified MPC control technique that will be also applied on the pivot of the cardiovascular robot (Fig. 1). The procedure starts with the design of an initial MPC law, which is further explicitly robustified (via the convex optimization of a Youla parameter) under both unstructured and polytopic uncertainties, implying LMI and BMI constraints.

A. Initial Stabilizing MPC

The starting point consists into developing an initial stabilizing MPC law for a discrete-time LTI system given by (12), obtained after discretizing (6)-(7) with only $\dot{\theta}_m$ as output:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k) \end{cases} \Leftrightarrow (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{0}) \tag{12}$$

with $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times m}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{p\times n}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n\times 1}, \mathbf{u} \in \mathbf{R}^{m\times 1}$ and $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{p\times 1}$. For the steady state errors cancellation, an integral action on the control signal $\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k-1) + \Delta\mathbf{u}(k)$ is added to the state-space formulation (12), leading to an extended state vector $\mathbf{x}_e(k)$, with the corresponding model representation $(\mathbf{A}_e, \mathbf{B}_e, \mathbf{C}_e, \mathbf{0})$ [6].

In order to design the MPC gain, the following performance criterion is minimized:

$$J_2 = \sum_{i=N_1}^{N_2} \left\|\hat{\mathbf{y}}(k+i) - \mathbf{y}_r(k+i)\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{Q}}_{J_2}(i)} + \sum_{i=0}^{N_u-1} \left\|\Delta\mathbf{u}(k+i)\right\|^2_{\widetilde{\mathbf{R}}_{J_2}(i)} \tag{13}$$

using as tuning parameters: the output prediction horizons N_1, N_2, the control horizon N_u and the weightings $\widetilde{\mathbf{Q}}_{J_2}$, $\widetilde{\mathbf{R}}_{J_2}$. It is considered that $\Delta\mathbf{u}(k+i) = 0$, for $i \geq N_u$. The notation $\mathbf{y}_r$ symbolizes the angular velocity setpoint. The predicted output $\hat{\mathbf{y}}(k)$ is calculated as follows:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+i) = \mathbf{C}\,\mathbf{A}^i\hat{\mathbf{x}}(k) + \sum_{j=0}^{i-1}\mathbf{C}\,\mathbf{A}^{i-j-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(k+j) \tag{14}$$

with the state estimation $\hat{\mathbf{x}}(k)$ obtained from the observer:

$$\hat{\mathbf{x}}_e(k+1) = \mathbf{A}_e\,\hat{\mathbf{x}}_e(k) + \mathbf{B}_e\,\Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{K}[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_e\,\hat{\mathbf{x}}_e(k)] \tag{15}$$

For simplicity reasons, the matrix formulation [7] of (13) is used to obtain the future control sequence. Next, applying the well-known receding horizon principle, which is specific to predictive control, leads to the following control law:

$$\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{F}_r\mathbf{y}_r(k) - \mathbf{L}\,\hat{\mathbf{x}}_e(k) \tag{16}$$

with the setpoint pre-filter $\mathbf{F}_r$ and the MPC gain $\mathbf{L}$ (Fig. 3) calculated as in [6].

B. Youla-Kučera Parametrization – Basic Ideas

It is known from the literature [8], [9] that a stable Youla parameter can be used to find the class of all stabilizing controllers starting from an initial stabilizing state-feedback controller coupled with an observer. In [10], [11], the **Q** parameter has been used to improve the robustness of control laws. According to the modified controller paradigm [8], it is possible to modify an initial controller so that it accepts an auxiliary I/O pair $(\mathbf{u}', \mathbf{y}')$ with a zero transfer in between ($\mathbf{T}_{22\,\mathbf{zw}} = 0$, Fig. 2). Therefore, a stable **Q** parameter can be inserted (Fig. 2) without changing the initial I/O behavior.

The transfer $\mathbf{T}_{\mathbf{zw}}$ can be represented using the LLFT (Lower Linear Fractional Transformation) form of the initial controlled system coupled with the **Q** parameter:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{zw}} = \mathbf{T}_{11\,\mathbf{zw}} + \mathbf{T}_{12\,\mathbf{zw}}\,\mathbf{Q}(\mathbf{I} - \mathbf{Q}\mathbf{T}_{22\,\mathbf{zw}})^{-1}\,\mathbf{T}_{21\,\mathbf{zw}} \tag{17}$$

Obviously, when $\mathbf{T}_{22\,\mathbf{zw}} = 0$, expression (17) leads to:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{zw}} = \mathbf{T}_{11\,\mathbf{zw}} + \mathbf{T}_{12\,\mathbf{zw}}\,\mathbf{Q}\,\mathbf{T}_{21\,\mathbf{zw}} \tag{18}$$

which is an affine function in the Youla parameter, permitting convex specifications in closed-loop.

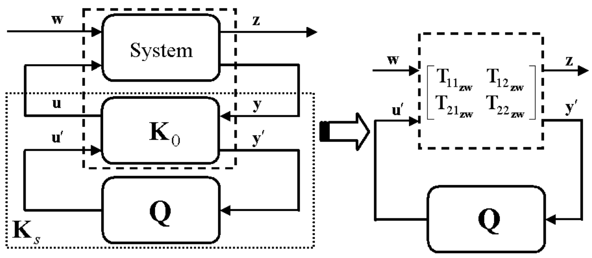


Fig. 2. Youla parametrization philosophy

C. Robust Stability under Unstructured Uncertainties

This part deals with the robust stability under unstructured uncertainties (additive uncertainties $\Delta_\mathbf{u}$ in Fig. 3). In order to satisfy this aspect, the small gain theorem [9], [12] is applied leading to the following optimization problem:

$$\min_{\mathbf{Q}\in\Re H_\infty} \left\|\mathbf{T}_{\mathbf{zb}}\right\|_\infty = \min_{\mathbf{Q}\in\Re H_\infty} \left\|\mathbf{W}_\mathbf{u}\mathbf{T}_{\mathbf{ub}}\right\|_\infty \tag{19}$$

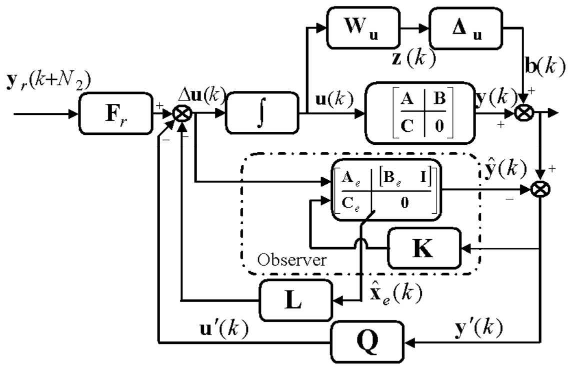


Fig. 3. Robustification procedure via the Youla parametrization

As the **Q** parameter initially varies in the infinite-dimensional space of stable transfers ($\Re H_\infty$), it is suitable to restrict the search. Therefore a sub-optimal solution which considers a FIR (Finite Impulse Response) filter is proposed. The state-space form $(\mathbf{A}_Q, \mathbf{B}_Q, \mathbf{C}_Q, \mathbf{D}_Q)$ of this **Q** parameter will be further used, with a known pair $(\mathbf{A}_Q, \mathbf{B}_Q)$ and an unknown variable pair $(\mathbf{C}_Q, \mathbf{D}_Q)$ that will result from the optimization procedure.

Using the following theorem, the optimization problem (19) can be reformulated in a more convenient way.

Theorem [13], [14] Consider a discrete time system given by the state-space representation $(\mathbf{A}_{cl}, \mathbf{B}_{cl}, \mathbf{C}_{cl}, \mathbf{D}_{cl})$. It is stable and its H_∞ norm is lower than γ if and only if:

$$\exists\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1^{\mathrm{T}} \succ 0 \,/ \begin{bmatrix} -\mathbf{X}_1^{-1} & \mathbf{A}_{cl} & \mathbf{B}_{cl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{cl}^{\mathrm{T}} & -\mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{cl}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{B}_{cl}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{cl}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{cl} & \mathbf{D}_{cl} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \prec 0 \tag{20}$$

where "$\succ 0$" ("$\prec 0$") is the notation for a strictly positive (negative) definite matrix.

The expression (20) can be transformed into a LMI (LMI_0) as detailed in [14], [11], [6], with the decision variables: $\mathbf{X}_1$, γ and the **Q** parameter hidden in the closed-loop matrices. Hence the resulting optimization problem is:

$$\min_{LMI_0} \gamma \tag{21}$$

D. Robust Stability under Polytopic Uncertainties

System parameters are not always precisely known, sometimes belonging to an uncertain polytopic domain. This part offers a way to guarantee the robust stability for systems under polytopic uncertainties via the Youla parametrization. Consider the following general form of a system under polytopic uncertainties:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \end{cases} \tag{22}$$

where $[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}] \in \mathbf{\Omega}$. The polytope $\mathbf{\Omega}$ is defined as the convex hull $\mathbf{\Omega} = Co\{[\mathbf{A}_1\ \ \mathbf{B}_1\ \ \mathbf{C}_1], \ldots, [\mathbf{A}_l\ \ \mathbf{B}_l\ \ \mathbf{C}_l]\}$, with:

$$[\mathbf{A}\ \mathbf{B}\ \mathbf{C}] = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i [\mathbf{A}_i\ \ \mathbf{B}_i\ \ \mathbf{C}_i]$$

for:

$$\lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1.$$

The aim is to guarantee the robust stability of system (22) under polytopic uncertainties implying the use of the **Q** parameter. The major difference from the previous part is that now, due to the polytopic uncertainties, the transfer $\mathbf{T}_{22\,\mathbf{zw}} \neq 0$. Hence convex specifications in the **Q** parameter are not possible anymore (17). For time-invariant systems, as the polytope is defined as the convex hull, guaranteeing the stability on the entire polytope is equivalent with the stability for each vertex of the polytopic domain $\mathbf{\Omega}$ [15]. The condition that should be satisfied in order to guarantee the stability on the uncertain polytopic domain is:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{X}_{2,i} & \mathbf{X}_{2,i}\mathbf{A}_{cl,i} \\ \mathbf{A}_{cl,i}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_{2,i} & -\mathbf{X}_{2,i} \end{bmatrix} \prec 0,\ \mathbf{X}_{2,i} = \mathbf{X}_{2,i}^{\mathrm{T}} \succ 0,\ i = \overline{1,l} \tag{23}$$

This is a BMI (noted BMI_i) in the decision variables $\mathbf{X}_{2,i}$ and the **Q** parameter included in the matrices $\mathbf{A}_{cl,i}$. In order to satisfy the robust stability under both unstructured and polytopic uncertainties, the global optimization problem is now formulated as follows:

$$\min_{LMI_0, BMI_i, i=\overline{1,l}} \gamma \tag{24}$$

Due to the BMI constraints, the optimization (24) is non convex and hence difficult to solve. In order to overcome this difficulty, a sub-optimal tractable solution [3] is proposed.

Firstly, the aim is to enlarge the polytopic domain around the nominal system by considering also the minimization of the complementary sensitivity (CS) function, which is added to (21). This is equivalent to include the minimization of the transfer between **b** and **y** (Fig. 3), including an appropriate weighting $\mathbf{W}_{CS}$. Hence the new LMI optimization problem is the following:

$$\min_{LMI_0, LMI_{CS}} c_1\gamma + c_2\gamma_{CS} \tag{25}$$

Solving (25) offers a way to increase the stability domain, but no information about its limits is available. Moreover, if this domain is too large, then the system performances may decrease. The adjustment of the stability domain to the considered polytope is addressed below.

Secondly, using the **Q** parameter obtained from (25) in the BMIs (23), a feasibility problem (for instance by minimizing the sum of trace of $\mathbf{X}_{2,i}$ (26)) must be solved:

$$\min_{LMI_{\mathbf{X}_i},\, i=\overline{1,l}} \sum_{i=1}^{l} tr(\mathbf{X}_{2,i}) \tag{26}$$

where $LMI_{\mathbf{X}_i}$ are derived from the BMIs (23), when using the **Q** parameter provided by (25).

Thirdly, the variables $\mathbf{X}_{2,i}$ are used in the final step of the optimization problem:

$$\min_{LMI_0, LMI_{\mathbf{Q}_i},\, i=\overline{1,l}} \gamma \tag{27}$$

where $LMI_{\mathbf{Q}_i}$ are the relaxations of the BMIs (23), with the value of $\mathbf{X}_{2,i}$ obtained from (26). From (27), a Youla parameter is obtained as the trade-off between robust stability under unstructured and polytopic uncertainties.

To summarize, this procedure can be synthesized in the following algorithm, with the possibility of reiteration of the last two steps:

1. Choose the appropriate weightings $\mathbf{W}_{\mathbf{u}}, \mathbf{W}_{CS}, c_1, c_2$ and solve the LMI problem (25) until you obtain a Youla parameter $\mathbf{Q}^*$ that will stabilize the entire uncertain polytopic domain is obtained;
2. Introduce this $\mathbf{Q}^*$ parameter into the BMIs (23), that become LMIs in $\mathbf{X}_{2,i}$, and solve the feasibility problem (26) leading to a $\mathbf{X}_{2,i}^*$;
3. Using $\mathbf{X}_{2,i}^*$, solve the final LMI problem (27) that will guarantee robust stability under both unstructured and polytopic uncertainties.

V. Results Analysis

The proposed control strategies (LQ control and robustified MPC control) are now applied to control the angular velocity of the pivot arm of the Innova medical robot (Fig. 1). The model parameters are:

$J_{PVT} = 101\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ $\quad d = 98\,\mathrm{Nm/(rad/s)}$ $\quad k = 6 \cdot 10^4\,\mathrm{Nm/rad}$

$J_m = 186.82\,\mathrm{kg \cdot m^2}$ $\quad f_v = 1650\,\mathrm{Nm/(rad/s)}$ $\quad \Gamma_{I0} = 300.5\,\mathrm{Nm}$

Both control laws are designed in order to achieve the same performances in terms of time response and maximum motor torque (which is the admissible control signal).

A. Tuning parameters

First of all, the LQ controller is developed, using the weighting matrices $\mathbf{Q}_{J_1} = 10^8 diag(1\ \ 1\ \ 0.1\ \ 0.1\ \ 1)$ and $\mathbf{R}_{J_1} = 1$. Furthermore, the following control vector gain is obtained $\mathbf{K}_{LQ} = [3939\ 10268\ 120471\ 138175\ 10000]$. The observer gains were calculated in order to impose the observer dynamics four times faster than the LQ controller gains.

The robustified MPC controller is then designed. The initial MPC law has the following tuning parameters: $N_1 = 1$,

$N_2 = 16$, $N_u = 5$, $\widetilde{\mathbf{R}}_{J_2}(i) = 6.815 \cdot 10^{-9}$ and $\widetilde{\mathbf{Q}}_{J_2}(i) = 1$. A discretized model is used here (sampling period $T_s = 0.005\text{s}$). This nominal discretized model (obtained for the nominal values k and θ_e) will be further denoted by $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}, \mathbf{C}, 0)$. The next step is to add the integral action on the control signal leading to an extended discrete state-space representation $(\mathbf{A}_{e0}, \mathbf{B}_e, \mathbf{C}_e, 0)$. As this integral action simplifies the derivative behavior of the model (leading to a non-observable mode), a solution to the design of the required observer is to find a minimal realization of the extended model. An orthogonal transformation $\mathbf{U}$ has to be used leading to the following Kalman decomposition $(\mathbf{U}\mathbf{A}_e\mathbf{U}^T, \mathbf{U}\mathbf{B}_e, \mathbf{C}_e\mathbf{U}^T) = (\mathbf{A}_r, \mathbf{B}_r, \mathbf{C}_r)$. This orthogonal transformation also multiplies the controller gain $\mathbf{L}_r = \mathbf{L}\mathbf{U}^T$. The final minimal state-space form of the model is:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r(k+1) &= \mathbf{A}_r \mathbf{x}_r(k) + \mathbf{B}_r \Delta u \\ y(k) &= \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(k) \end{aligned} \tag{28}$$

For convenience, the input is now Δu, instead of u. Hence, the following observer will be used:

$$\hat{\mathbf{x}}_r(k+1) = \mathbf{A}_r \hat{\mathbf{x}}_r(k) + \mathbf{B}_r \Delta u + \mathbf{K}[y(k) - \mathbf{C}_r \mathbf{x}_r(k) + b(k)] \tag{29}$$

where the observer gain $\mathbf{K}$ is obtained arbitrarily placing the eigenvalues of $\mathbf{A}_r - \mathbf{K}\mathbf{C}_r$ in a stable region. The control signal results from the minimization of the performance criterion (13) with the specified prediction horizons and weightings, leading to the following control signal:

$$\Delta u(k) = y_{Fr}(k) - \mathbf{L}_r \hat{\mathbf{x}}_r(k) - u'(k) \tag{30}$$

In the robustification procedure, the degree of the $\mathbf{Q}$ polynomial is chosen equal to 10. The uncertain polytopic domain considered here is obtained for a variation of the stiffness of $\pm 20\%$ from its nominal value ($k \in [\underline{k}; \overline{k}]$) and also for a variation of θ_e inside the interval $[0; 2\pi]$.

In the first step (25) of the tractable solution, the coefficients $c_1 = 1$, $c_2 = 7000$ are used. The weighting on the control increment is $\mathbf{W}_{\Delta u} = (1 - 0.8q^{-1})^2 / 0.04$. No weighting on the complementary sensitivity function is considered. In the second step, a different variable $\mathbf{X}_{2,i}$, with $i = \overline{1,4}$ is used for each vertex of the polytope. From the third step, a Youla parameter is found leading to the robustified controller RMPCp3.

B. Frequency analysis

The singular values of the transfer from *b* to *u* (using both controllers) are illustrated in Fig. 4. It can be noticed that the LQ controller has a better behavior (towards additive unstructured uncertainties) in the high frequency range even if it was not designed in order to explicitly take into account this specification. The RMPCp3 controller is still reasonable concerning its robust stability, while it offers the possibility to clearly incorporate the robust stability requests. RMPCp3 also has a larger bandwidth than the LQ controller leading to a better behavior in the time domain. The robust stability of RMPCp3 could still be improved choosing a larger degree for the $\mathbf{Q}$ polynomial.

An analysis of the singular values of the complementary sensitivity function is offered in Fig. 5. The LQ controller has a better frequency response in the high frequency range, but RMPCp3 remains reasonable in terms of robustness requirements, offering in addition a larger bandwidth.

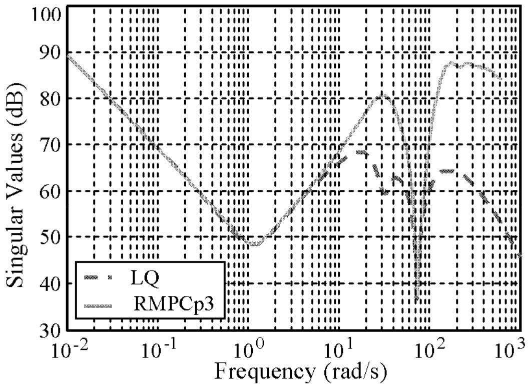


Fig. 4. Singular values of the transfer from *b* to *u*

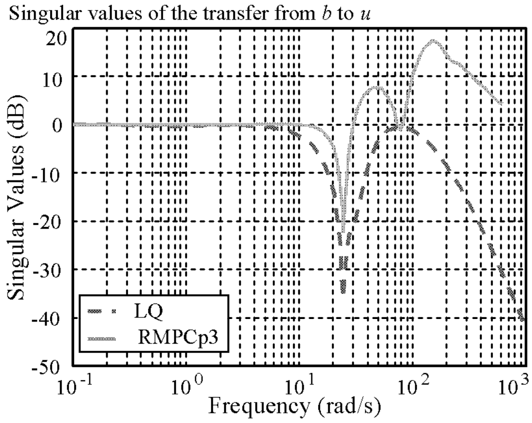


Fig. 5. Singular values of the complementary sensitivity function

C. Time domain comparison

The time domain responses are obtained using a step set-point of magnitude 20 deg/s smoothed by a second order filter with a bandwidth of 35 rad/s. A step disturbance of magnitude 20 Nm is also considered at time instant $t = 4\text{s}$. Figures 6 and 7 presents the outputs $\dot{\theta}_m$, respectively $\dot{\theta}$ of the non-linear model.

It can be noticed that the results obtained with both controllers are quite similar, the RMPCp3 controller offering a better tracking and also a faster disturbance rejection.

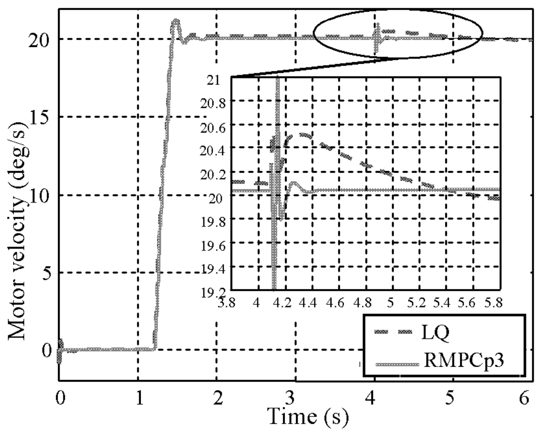


Fig. 6. Output: $\dot{\theta}_m$ - Motor velocity comparison (deg/s)

Figure 8 shows the control signal applied on the non-linear model. Both controllers offer admissible control signals that can be applied on the real robot.

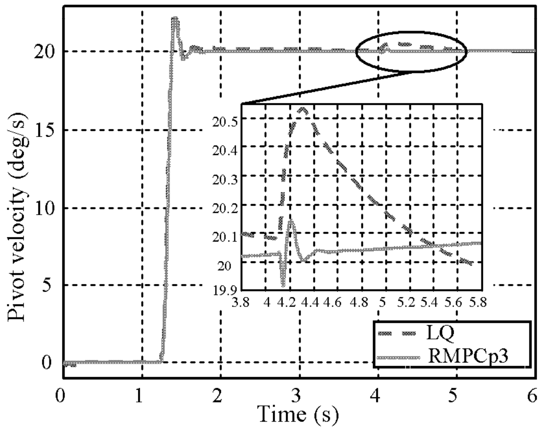


Fig. 7. Output: $\dot{\theta}$ - Pivot velocity comparison (deg/s)

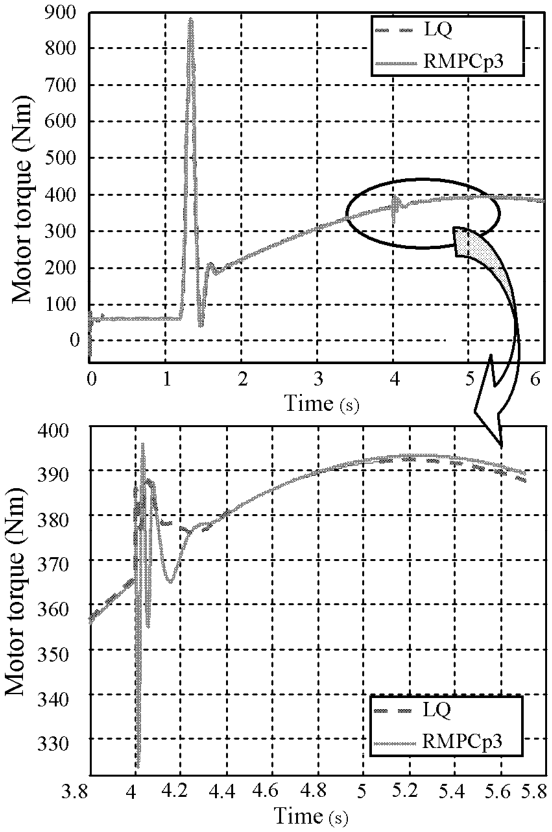


Fig. 8. Control signal: motor torque (Nm)

VI. CONCLUSIONS

This paper proposes two advanced control techniques for the control of the angular velocity of the pivot of a cardiovascular robot, which is a strongly non-linear system.

A LQ controller is proposed and further compared with a robustified Model Predictive Control law. Both controllers are designed in order to accomplish a desired level of performance for the time-domain response. The MPC controller leads to a faster response time compared with the LQ controller. However, its transient response is less damped.

Robust stability under both unstructured and polytopic uncertainties is explicitly considered in the synthesis of the robustified MPC controller, via the Youla parameter optimization, involving both LMI and BMI constraints. This robustification procedure can be applied also to multivariable, even non-square systems. In addition, the robustification procedure permits to guarantee nominal performance specifications for the disturbance rejection considering time-domain templates [6] during the optimization. This allows eliminating the oscillations when dealing with disturbances rejection.

Future developments will consider the application of these strategies on the entire model of the robot, containing the four axes model. This will be a strongly coupled and non-linear system. The multivariable aspect motivates the choice of the robustified MPC controller which can naturally deal with the coupling influence in multivariable systems.

Another perspective concerning the pivot control is to apply the robustification procedure associated here with an initial MPC controller to the LQ controller in order to explicitly take into account the robust stability under polytopic uncertainties.

REFERENCES

[1] M.W. Spong, S. Hutchinson, and M Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, John Wiley and Son, 2005.

[2] E.F. Camacho and C. Bordons, *Model predictive control.* Springer-Verlag, London, 2nd ed., 2004.

[3] C. Stoica, P. Rodríguez-Ayerbe, D. Dumur and S. Tebbani. “Towards tractable off-line robustified controllers for uncertain systems“, *10th IEEE International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*, pp. 2136-2141, Hanoi, 2008.

[4] Al Assad, O., E. Godoy and V. Croulard, “Irreversibility modeling applied to the control of complex robotic drive chains”, *4th ICINCO Conference*, Angers, pp. 217-222, 2007.

[5] K. Ogata, *Modern control engineering*, Prentice-Hall Inter., 3rd ed., 1997.

[6] C. Stoica, P. Rodríguez-Ayerbe, and D. Dumur, “Off-line Improvement of Multivariable Model Predictive Control Robustness”, *46th IEEE CDC*, New Orleans, pp. 2826-2831, 2007.

[7] J.M. Maciejowski, *Predictive control with constrains.* Prentice Hall, 2001.

[8] S. Boyd and C. Barratt, *Linear controller design. Limits of performance.* Prentice Hall, 1991.

[9] J.M. Maciejowski, *Multivariable feedback design.* Addison-Wesley Publishing Company, Wokingham, 1989.

[10] J.A. Rossiter, *Model based predictive control. A practical approach.* CRC Press LLC, 2003.

[11] C. W. Scherer, “An efficient solution to multi-objective control problem with LMI objectives”, *Systems and Control Letters*, 40, pp 43-57, 2000.

[12] K. Zhou, J.C. Doyle and K. Glover, *Robust and optimal control.* Prentice Hall, 1996.

[13] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, *Linear matrix inequalities in system and control theory.* SIAM Publications, Philadelphia, 1994.

[14] B. Clement and G. Duc, “A multiobjective control via Youla parameterization and LMI optimization: application to a flexible arm”, *IFAC Symposium on Robust Control and Design*, Prague, 2000.

[15] M.V. Kothare, V. Balakrishnan and M. Morari, “Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities”, *Automatica*, 32(10), pp. 1361-1379, 1996.

Références bibliographiques

Abba, G. and N. Chaillet (1999). "Robot Dynamic Modeling Using a Power Flow Approach with Application to Biped Locomotion." Autonomous Robots **6** : 39-52.

Abba, G. and P. Sardain (2003). "Modélisation des frottements dans les éléments de transmission d'un axe de robot en vue de son identificationFriction modelling of a robot transmission chain with identification in mind." Mécanique & Industries **4** : 391-396.

Al Assad, O. (2005). Modélisation des tubes à rayons-X et développement d'outils d'identification automatique. Nantes, Ecole Centrale de Nantes. **Thèse de Master**.

Al Assad, O., E. Godoy, et al. (2007). Irreversibility modelling applied to the control of complex robotic drive chains. 4th ICINCO Conference. Angers, France **:** 217-222.

Al Assad, O., E. Godoy, et al. (2008). Automatic models generation for robotic applications. Nordic MATLAB User Conference. Stockholm, Sweden.

Al Assad, O., E. Godoy, et al. (2008). Macroscopic drive chain efficiency modeling using state machines. 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea **:** 2294-2299.

Al Assad, O., C. Martinez Ferreira, et al. (2009). Vibration reduction using a two-step braking profile. American Control Conference, St. Louis, Missouri, USA.

Alazard, D., C. Cumer, et al. (1999). Robustesse et commande optimale.

Allano, S. (2000) "Petits moteurs électriques." Traité Génie électrique.

Benallegue, A. and N. K. Msirdi (2002). Commande de robots à articulations flexibles. Commande des robots manipulateurs. Hermes, Lavoisier.

Biannic, J. M. (1996). Commande Robuste des Systèmes à Paramètres Variables - Applications en Aéronautique. Toulouse, France, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. **Thèse de Doctorat**.

Book, W. J. (1989) "Modeling, design, and control of flexible manipulator arms: Status and trends." Proceedings of the NASA Conference on Space Telerobotics **3**, 11-24.

Borsotto, B., D. Beauvois, et al. (2006) "Les frottements : origines physiques et modèles." Technologies & formations.

Boverie, S., D. Dan Cho, et al. (2008). "Mechatronics, robotics and components for automation and control IFAC milestone report." Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control: 10800-10809.

Brun-Picard, D. (2005) "Influence des lois de mouvement sur les déformations et les vibrations des machines à grande vitesse." Mécanique & Industries **6**.

De Larminat, P. (2002). Commande des systèmes linéaires. Paris, Hermès Science.

Dequidt, A., D. Bernier, et al. (2003). Sur une extension du paramétrage de Denavit & Hartenberg pour la description systématique des chaînes cinématiques. 16ème Congrès Français de Mécanique.

Duc, G. (1994). Robustesse des systèmes linéaires multivariables. SUPELEC, France. **03317**.

Duc, G. and S. Font (1999). Commande Hinifi et Mu-Analyse, Hermes.

Fanchon, J.-L. (2004). Guide des sciences et technologies industrielles, Nathan.

Flaus, J.-M. (1994). La Régulation Industrielle.

Fliess, M., J. Lévine, et al. (1992). Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. Paris, Compte Rendu Académie Sciences**:** 619-624.

Fliess, M., J. Lévine, et al. (1995). "Flatness and defect of nonlinear systems: introduction theory and examples." Int. J. Control **61**: 1327-1361.

Godoy, E. (2007). Régulation Industrielle, Dunod.

Godoy, E. and E. Ostertag (2003). Commande Numérique des systèmes.

Gorges, S. (2007). Vers un système de navigation 3D en neuroradiologie interventionnelle. Nancy, Doctorat de l'université Henri Poincaré. **Thèse de Doctorat**.

Henriot, G. (1991). Traité théorique et pratique des engrenages, Dunod.

Kalman, R.E. (1960) "Contributions to the Theory of Optimal Control"Bol. Soc Mat. Mex., **5** : 102-121.

Kelly, R., V. Santibáñez, et al. (2005). Control of robot manipulators in joint space. London, Springer.

Kerrien, E. (2000). Outils d'imagerie multimodalié pour la neurologie interventionnelle. Nancy, Institut National Polytechnique de Lorraine. **Thèse de Doctorat**.

Khalil, W. and E. Dombre (1999). Modélisation, identification et commande des robots, Hermes Science Publications.

Khalil, W. and J. F. Kleinfinger (1986). A new geometric notation for open and closed loop robots. IEEE Robotics and Automation. San francisco, IEEE **:** 1174-1180.

Liégeois, A. (2001). Modélisation et commande des robots manipulateurs. Traité Informatique industrielle, Techniques de l'Ingénieur.

Love, J. (2007). Process Automation Handbook.

Lévine, J. (2004). Analyse et Commande des Systèmes Non Linéaires. Centre Automatique et Systèmes Ecole des Mines de Paris.

Martin, P. (1992). Contribution è l'étude des systèmes différentiellement plats. Paris, Ecole des Mines de Paris. **These de Doctorat**.

Nordin, M. and P. O. Gutmanb (2002). "Controlling mechanical systems with backlash—a survey." Automatica **38** : 1633 – 1649.

Ogata, K. (1997). Modern Control Engineering, Prentice Hall International.

Pao, L. Y. (1999) "Multi-input shaping design for vibration reduction." Automatica **35**, 81-89.

Peaucelle, D. (2000). Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. Toulouse, France, Université Toulouse III-Paul Sabatier. **Thèse de Doctorat**.

Poignet, P., M. Gautier, et al. (2002). "Modeling, simulation and control of high speed machine tools using robotics formalism." Mechatronics **12** : 461-487.

Stoica, C., O. Al Assad, et al. (2008). Application of Robustified Model Predictive Control to a Medical Robot. 23rd IAR Workshop on Advanced Control and Diagnosis 2008. Coventry, UK**:** 180-185.

Stoica, C., O. Al Assad, et al. (2009). Control of a flexible arm by mean of robustified MPC. European Control Conference 2009, Budapest, Hungary.

Van Meer, F. (2005). Conception et réalisation d'une instrumentation terminale intégrée en chirurgie mini-invasive robotisée. Toulouse, INSA. **Thèse de Doctorat**.

Vandanjon, P. O. (1995). Identification robuste des paramètres inertiels des bras manipulateurs par découplage fréquentiel, Ecoles des Mines de Paris.

Webb, S. (1988). Physics of Medical Imaging, Institute of Physics Publishing.

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la modélisation et la commande des robots poly-articulés utilisés dans les applications d'imagerie médicale. Ces travaux ont porté sur deux aspects complémentaires, d'une part, la méthodologie de modélisation des robots positionneurs dans les applications d'imagerie médicale. D'autre part, les méthodologies de contrôle de mouvements et de réduction des vibrations.

Les concepts développés dans ce travail sont présentés selon une approche « Bottom-up » visant à étudier le cas mono-axe afin de mieux définir la problématique identifiée et de comprendre l'impact des solutions. Ensuite, l'étude portera sur l'extension des concepts retenus dans le cadre de la commande multiaxe du robot.

Dans la phase de modélisation, une démarche formalisée en vue d'obtenir les modèles des robots (de connaissances, d'analyse et de commande) est exposée. Aussi, ce travail vise à démontrer, via une étude comparative, le potentiel d'application de plusieurs approches de modélisation et de commande dans ce cadre précis. En complément au travail de modélisation, un outil d'aide à la modélisation a été mise en place.

Les modèles établis ont permis d'étudier différentes stratégies de commande, l'étude a porté sur l'élaboration de trois actions de commande, à savoir, la génération de trajectoire du système, le calcul du couple d'anticipation, et le calcul du correcteur qui permet de garantir la poursuite de la trajectoire.

Enfin, une part importante de ce travail a été consacrée à la validation expérimentale des modèles établis et aux essais des lois de commandes retenues sur les robots d'imagerie médicale.

Mot-clés : Robotique médicale, imagerie médicale, modélisation des robots, transmissions irréversible, génération de trajectoires, platitude, filtrage passif, régulation en cascade.

Abstract

This PhD thesis deals with the problem of the modelling and the control of poly-articulated robots used for medical imaging systems. The methodologies of modelling and the control issues are considered particularly in the case of the vibration reduction.

This work proposes a bottom-up approach, where a monoaxis robot case a studied in order to address the theoretical issues and understand the solutions' impact. Then, the concept is extended to cover the multiaxis robot case.

The proposed modelling approach consists of modelling the robot gantry as well as the drive chains. Besides, modelling the drive chain irreversibilities and the structural flexibilities was considered so as to create a complete simulation environment of the medical robot.

The developed robot models formed the base for the control laws development and validation. The study focused on the trajectories generation, the anticipation action, and the controller design.

A considerable part of this work was dedicated to the experimental validation of the elaborated models as well as the control laws validation.

Keywords: Medical robotic, medical imaging, robots modelling, irreversible transmissions, trajectories generation, platitude, passive filtering, cascaded control.